MICHAEL KNUDSEN

FINANSIERING

GRATIS KOMPENDIUM

Michael Knudsen

Lær Nemt! Finansiering
- Kompendium

Lær Nemt! Finansiering - Kompendium

ISBN 87-7681-009-7

Indholdfortegnelse

1. Indledning

Dette kompendium henvender sig primært til HA-studerende på CBS, der studerer faget Finansiering på HA-almen 2. år. Kompendiet er ikke ment som en lærebog, men nærmere som en form for opskriftsbog, der skal medvirke til at skabe et overblik over – de til tider komplekse – problemstillinger i Finansiering.

Kompendiet indeholder en gennemgang af den grundlæggende finansierings- og investeringsteori løbende suppleret med eksempler. Kompendiet indeholder desuden to eksempler på større opgaver samt et appendiks.

Kompendiet er primært udarbejdet på baggrund af følgende værker: ”Corporate Finance – international edition” af Ross, Westerfield og Jordan, ”Grundlæggende Investeringsteori – 3. udgave” af Ove Hedegaard, samt ”Finansielle markeder – 2. udgave” af Michael Møller og Niels Christian Nielsen.

2. Markedseffektivitet

Med markedseffektivitet forstås i hvor stort omfang beslutningstageren har adgang til information, og hvorvidt al information er afspejlet i markedspriserne for finansielle aktiver.

Markedseffektivitet kan forekomme i tre forskellige former:

- Svag forstand: fortidens pris- og kursudvikling kan ikke anvendes til at forudsige den fremtidige udvikling.
- Semistærk forstand: priserne og kurserne afspejler på ethvert tidspunkt al den information, der er offentligt tilgængeligt og relevant for handlen.
- Stærk forstand: al information såvel privat som offentlig er afspejlet i kurserne og priserne. Det vil altså sige, at der ikke er mulighed for insiderhandel under denne markedseffektivitet.

3. Renter

"Rente" er et økonomisk begreb, der beskriver den betaling, som en långiver får fra låntager for at stille kapital til rådighed. Tiden kaldes også for termin.

Nominel rente

Den nominelle rente er den rente, som står på en obligation eller en bankkonto. Denne rente kaldes også for den pålydende rente.

Den nominelle rente p.a. (pro anno = årlig) omregnes tilden nominelle rente for et andet tidsrum (f.eks. den halvårlig rente) vha. flg. formel:

$R_{p.n.} = \frac{R_{p.a.}}{n}$, hvor

n er antal terminer pr. År
$R_{p.a}$ er den nominelle årlige rente

***Eksempel*:**
Hvis den nominelle rente er 12% p.a. og der er halvårlig rentetilskrivninger svarer til en halvårlig rente (n=2) på $\frac{12\%}{2} = 6\%$ pr. halvår.

Den nominelle årlige rente:

$R_{p.a} = R_{p.n} \cdot n$, hvor

$R_{p.n}$ er den nominelle terminsrente
n er antallet af terminer pr. år

Eksempel:
den nominelle kvartalsmæssige (n=4) rente er 4%, hvilket giver $R_{p.a} = 4\% \times 4 = 16\%$ p.a.

Effektiv rente

Den effektive rente er den rente, der i realiteten betales ved at placere eller låne kapital hos en bank eller lignende.

Den effektive rente p.a. omregnes til den effektive rente for et andet tidsrum (f.eks. den halvårlig rente) vha. flg. formel:

$R_{p.n.} = (1 + R_{p.a})^{1/n} - 1$, hvor

n er antal terminer
$R_{p.a}$ er den årlige termins rente

Eksempel:
En 12% effektive årlig rente svarer til en halvårlig rente (n=2) på $(1+12\%)^{1/2} - 1 = 5{,}83\%$ pr. halvår.

Den effektive årlige rente:

$$R_{p.a.} = (1 + R_{p.n})^n \text{ , hvor}$$

n er antal terminer
$R_{p.n}$ er den nominelle termins rente

Eksempel:
Er den nonimelle rente 12% p.a. og er der kvartalsmæssige rentetilskrivninger så er den nominelle kvartalsmæssige (n=4) rente 12% / 4 = 3%, hvilket giver en årlig effektiv rente på $R_{p.a} = (1+0{,}03\%)^4 - 1 = 12{,}5509$ % p.a.

Bemærk: Den effektive rente bliver større end den nominelle rente ,når der er tale om alt andet end årlige rentetilskrivninger (fx halvårlige, kvartalsmæssige, månedlige o. lign.).

Kontinuerte rentetilskrivninger – Continuous compounding

Hvis renterne tilskrives konstant er der tale om kontinuert rentetilskrivning.

Effektiv årlig rente ved kontinuerte rentetilskrivninger:

$$R_{p.a.} = e^{R_{p.n.}} - 1 \text{ , hvor}$$

$R_{p.n}$ er den nominelle kontinuerte tilskrevne rente

Eksempel:
Den årlige nominelle rente på en bankbog er 12% p.a. Der er 4 rentetilskrivninger om året. Den effektive rente kan nu bestemmes.:

Den nominelle kvartalsmæssige rente er: $R_{p.n.} = \frac{R_{p.a.}}{n} = \frac{12\%}{4} = 3\%$

Den effektive årlige rente er: $R_{p.a.} = (1 + R_{p.n.})^n = (1 + 3\%)^4 = 12{,}6\%$

3.1 Skat og inflation

Der forekommer ofte skat (T) og inflation (Q) i opgaver med rentesregning. Afhængig af hvordan betalinger/cashflow er opgjort, påvirker det den rente, man skal bruge.

Regner man med beløb før skat, skal renten være før skat – regner man med beløb efter skat, skal renten være efter skat.

Desuden regner man også i faste og løbende priser. Regner man i løbende priser (dvs. priserne er ikke korrigeret for inflation = uden inflation) skal renten, man benytter, ikke være korrigeret for inflation. Regner man derimod i faste priser (dvs. priser, der er korrigeret for inflation = med inflation), skal renten, man benytter, også korrigeres for inflation. Når renten er korrigeret for inflation, kalder man den for realrenten.

Man har altid et basis-år når man regner i faste priser. Fx kan man regne i 1997-priser. For at få priserne i år 1998 i 1997-priser skal de korrigeres for inflation. Det gør man ved at gange priserne med $(1+Q)^{-n}$, hvor n angiver antallet af år i forhold til basis-året. I dette tilfælde er n = 1.

Hermed en tabel, der gør det overskueligt at vurdere, hvilken rente man skal anvende i en given situation.

	Uden Skat	Med Skat (efter skat)
Uden Inflation (nominelle beløb)	R	$R \cdot (1-T)$
Med Inflation (reelle beløb/ korrigeret for inflation)	$\frac{(1+R)}{(1+Q)} - 1$	$\frac{1+(R \cdot (1-T))}{(1+Q)} - 1$

Eksempel:
Henrik har en kalkulationrente på 10% p.a. Inflationen er 5% p.a. og han skattesats er 30%. Hans kalkulationsrente i forskellige situationer kan nu bestemmes:

	Uden Skat	Med Skat (efter skat)
Uden Inflation (nominelle beløb)	10%	$10\% \cdot (1 - 30\%) = 7\%$
Med Inflation (reelle beløb/ korrigeret for inflation)	$\frac{(1+10\%)}{(1+5\%)} - 1 = 4{,}8\%$	$\frac{1+(10\%(1-30\%))}{(1+5\%)} - 1 = 1{,}9\%$

3.2 Diskontering

På de følgende sider vil nedenstående begreber blive anvendt. Disse forkortelser anvendes, da de er i overensstemmelse med TI 83 og TI 83 +

Forkortelse	Navn	Betydning
PV	Present Value – Nutidsværdi	Et beløbs værdi i dag. Tidspunkt 0.
PMT	Payment – Annuitet	Betalinger over tid, der er lige store.
FV	Future Value – Fremtidsværdi	Hvad et beløb er hver på et givet tidspunkt i fremtiden. Tidspunkt N.
n	Antal terminer	Det antal terminer som situationen omhandler.
R	Renten	Den rente man betaler eller får for at stille kapital til rådighed.

NB: Renten og terminer skal selvfølgelig passe sammen. Er der tale om halvårlig rentetilskrivning, så skal renten også være halvårlig.

3.3 Nutidsværdi af et enkelt beløb

En krone i dag er mere værd end en krone i morgen. Værdien i dag, af et beløb i fremtiden, kan findes ved at tilbagediskontere beløbet.

Ønsker man at tilbage diskontere et beløb anvendes flg. formel:

$$\mathrm{PV} = FV \cdot (1+R)^{-n}$$

Hvis der forekommer kontinuerte rentetilskrivninger, ser formlen lidt anderledes ud.

Nutidsværdien af et enkelt beløb med kontinuert rentetilskrivnings:

$$\mathrm{PV} = \frac{FV}{e^{R \cdot n}}$$

3.4 Nutidsværdi af en annuitet

Bagudbetalt annuitet

Ønsker man at finde nutidsværdien af en række fremtidige betalinger (annuiteter), der er bagudbetalte (første betailing sker i slutningen af første termin) anvendes flg. formel:

$$\mathrm{PV_{bagud}} = \mathrm{PMT} \cdot \alpha_{n \neg R} = \mathrm{PMT} \cdot \frac{(1+\mathrm{R})^n - 1}{(1+\mathrm{R})^n \cdot \mathrm{R}} = \mathrm{PMT} \cdot \frac{1-(1+\mathrm{R})^{-n}}{\mathrm{R}}$$

Bemærk: Gælder kun for R>0. For R=0 se nedenfor.

Står der i en opgave blot annuiteter, kan man antage, at de er bagudbetalte.

Eksempel:
Henrik får hvert år de næste 7 år 200.000 kr. i løn om året. Beløbet bliver hvert år korrigeret for inflation så hans reelle løn er den samme i de 7 år[1]. Henrik har en kalkulationsrente på 10%, inflationen er årligt 5% og hans skattesats er 30%. Henrik ønsker at bestemme nutidsværdien af sin løn i de syv år.

Kalkulationsrente:

Da beløbet er korrigeret for inflation (reelle beløb) og da Henrik skal betale skat af sin løn (efter skat) bliver hans kalkulationsrente:

$$R_{\text{efter skat, reelle beløb}} = \frac{1+(R\cdot(1-T))}{(1+Q)} - 1 = \frac{1+(10\%\,(1-30\%))}{(1+5\%)} - 1 = 1{,}9\%$$ [2]

Udbetalt løn:

Da Henrik skal betale skat af sin løn modtager han hvert år $200.000kr - 200.000kr \cdot 30\% = 140.000$ kr. efter skat.

Nutidsværdien:

Der er her tale om en bagudbetalt annuitet, så formlen herfor kan anvendes.

$$\text{PV}_{\text{bagud}} = \text{PMT} \cdot \frac{1-(1+R)^{-n}}{R} = 140.000 \cdot \frac{1-(1+1{,}9\%)^{-7}}{1{,}9\%} = 140.000 \cdot 6{,}5 = 909.572 \text{ kr.}$$

[1] Når der er tale om reelle beløb svarer det til, at hans løn stiger med 5% (inflationen) om året. Dvs. han får mere i nominel løn end 200.000 hvert år. Det første år får han fx 200.000 plus 5% dvs. 210.000 kr. På den måde sikrer han sig, at han har det samme forbrug hvert år.

[2] Var der tale om nominelle beløb – dvs. at han faktisk fik nominelt 200.000 kr. i løn hvert år – så var kalkulationsrente i stedet 7%.

Nutidsværdien af en voksende bagdudbetalt annuitet:

$$PV = \frac{PMT}{R-g} \cdot \left(1 - \left(\frac{1+g}{1+R}\right)^n\right) \text{, hvor}$$

g angiver vækstraten i procent

Bemærk: Der er to vigtige pointer i forbindelse med ovenstående formel.

1. PMT antages at være bagudbetalt. Er den forudbetalt korrigeres vha. nedenstående formel for en forudbetalt annuitet.
2. R skal være større end g.

Forudbetalt annuitet

Ønsker man at finde nutidsværdien af en række fremtidige betaliner (annuiteter), der er forudbetalte (første betailing sker i begyndelsen af første termin) anvendes flg. formel:

$$PV_{forud} = PV_{bagud} \cdot (1+R) = PMT \cdot \alpha_{n \neg R} \cdot (1+R) = PMT \cdot \frac{(1+R)^n - 1}{(1+R)^n \cdot R} \cdot (1+R)$$
$$= PMT \cdot \frac{1-(1+R)^{-n}}{R} \cdot (1+R)$$

Bemærk: Gælder kun for R>0. For R=0 se nedenfor.

Eksempel (fortsat):
Antag nu, at Henriks løn er forudbetalt. Nutidsværdien af hans løn kan nu bestemmes vha. formlen for en forudbetalt annuitet:

$PV_{forud} = PV_{bagud} \cdot (1+R) = 909.572 \cdot (1+1{,}9\%) = 926.854$ kr.

For det specielle tilfælde at R = 0% gælder der følgende sammenhæng:

$$\alpha_{n \neg R} = \alpha_{n \neg 0} = n$$

Dvs. får man 100 kr. hvert år de næste 10 år, så er nutidsværdien blot 1000 kr.

Har man en betalingsstrøm, i form af en annuitet, der forekommer i det uendelige, kan nutidsværdien findes ved hjælp af nedenstående formel.

Nutidsværdien af en uendelig betalingsstrøm:

$$PV = \frac{PMT}{R}$$

Bemærk: R>0. Er R=0 er nutidsværdien principielt uendelig stor.

Eksempel (fortsat):
Får Henrik i stedet 140.000 kr. udbetalt efter skat hvert år.
Nutidsværdien bliver: $PV = \frac{PMT}{R} = \frac{140.000}{1{,}9\%} = 7.368.421$ kr.

Af og til vil man få en annuitet, der forekommer i det uendelige og, som vokser med en bestemt procentsats om året. Nutidsværdien af denne kan man også finde ved hjælp af nedenstående formel.

Nutidsværdien af en uendelig og voksende betalingsstrøm:

$$PV = \frac{PMT}{R - g} \text{ , hvor}$$

g er vækstraten i procent

Bemærk: Der er to vigtige pointer i forbindelse med ovenstående formel.

1. PMT antages at være bagudbetalt. Er den forudbetalt korrigeres vha. nedenstående formel for en forudbetalt annuitet.
2. R skal være større end g.

3.5 Annuiteten af en nutidsværdi

Ønsker man at finde ud, hvor meget en specifik nutidsværdi kan give i annuiteter i en række terminer anvendes nedenstående formel.

Bagudbetalt (dvs. annuiteterne kommer første gang i slutningen af første termin):

$$PMT_{bagud} = PV \cdot \alpha^{-1}_{n-R} = PV \cdot \frac{(1+R)^n \cdot R}{(1+R)^n - 1} = PV \cdot \frac{R}{1-(1+R)^{-n}}$$

Bemærk: Gælder kun for R>0. For R=0 se nedenfor.

Forudbetalt (dvs. annuiteterne kommer første gang i begyndelsen af første termin):

$$PMT_{forud} = PMT_{bagud} \cdot (1+R)^{-1} = PV \cdot \alpha^{-1}_{n-R} \cdot (1+R)^{-1} = PV \cdot \frac{(1+R)^n \cdot R}{(1+R)^n - 1} \cdot (1+R)^{-1}$$
$$= PV \cdot \frac{R}{1-(1+R)^{-n}} \cdot (1+R)\text{-}1$$

Bemærk: Gælder kun for R>0. For R=0 se nedenfor.

For det specielle tilfælde at R = 0% gælder der følgende sammenhæng:

$$\alpha^{-1}_{n-R} = \alpha^{-1}_{n-0} = n^{-1} = \frac{1}{n}$$

Dvs. får man 200 kr. i dag svarer det til hvert man hvert år de næste 5 år får 40 kr.

3.6 Fremtidsværdi af et enkelt beløb

Man kan også have behov for at finde ud af, hvor meget et beløb i dag er værd i fremtiden.

Ønsker man at fremdiskontere et beløb anvendes flg. formel

$$FV = PV \cdot (1+R)^n$$

Med kontinuerte rentetilskrivninger ser formlen lidt anderledes ud.

Fremtidsværdien af et enkelt beløb med kontinuert rentetilskrivnings:

$FV = PV \cdot e^{R \cdot n}$, hvor

n er antal terminer
R er den kontinuert tilskrevne rente

3.7 Fremtidsværdi af en annuitet

Ønsker man at finde fremtidsværdien af en række fremtidige betalinger (annuiteter), der er bagudbetalte (første betailing sker i slutningen af første termin) anvendes nedenstående formel

Fremtidsværdi af bagudbetalt annuitet:

$$FV_{bagud} = PMT \cdot S_{n-R} = PMT \cdot \frac{(1+R)^n - 1}{R}$$

Ønsker man at finde fremtidsværdien af en række fremtidige betaliner (annuiteter), der er forudbetalte (første betailing sker i begyndelsen af første termin) anvendes nedenstående formel.

Fremtidsværdi af forudbetalt annuitet:

$$FV_{bagud} = PMT \cdot S_{n-R} = PMT \cdot \frac{(1+R)^n - 1}{R}$$

3.8 Annuiteten af en fremtidsværdi

Ønsker man at finde ud af, hvor meget en specifik fremtidsværdi kan give i annuiteter i en række terminer anvendes flg. formel:

Bagudbetalt (dvs. annuiteterne kommer første gang i slutningen af første termin):

$$PMT_{bagud} = FV \text{ x } \cdot S_{n-R}^{-1} = PMT \cdot \frac{R}{(1+R)^n - 1}$$

Forudbetalt (dvs. annuiteterne kommer første gang i begyndelsen af første termin):

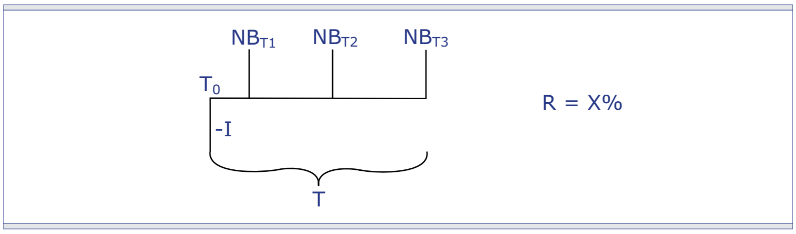
$$PMT_{forud} = PMT_{bagud} \cdot (1+R)^{-1} = FV \text{ x } \cdot S_{n-R}^{-1} \cdot (1+R)^{-1} = PMT \cdot \frac{R}{(1+R)^n - 1} \cdot (1+R)^{-1}$$

4. Investering

En investering består af følgende.:

- En initialinvestering I (-I).
- En kalkulationsrente R.
- En række nettobetalingsstrømme NB (summen af ind og udbetalinger i samme periode).
- En løbetid T.

Samlet set, kan det illustreres således:



4.1 Initialinvestering - I

Initialinvestering dækker over det beløb, som der skal investeres i begyndelsen af investeringen (tidspunkt 0). Dette beløb er ofte negativt.

4.2 Kalkulationsrente R

En kalkulationsrente bruges til at frem- og tilbagediskontere betalingsstrømme således, at disse bliver sammenlignelige. En investors kalkulationsrente bestemmes af følgende:

- Investorens tidspræference
- Investeringens risiko og usikkerhed
- Markedsrenten
- Alternativrenten
- Inflationsraten
- Evt. skatteprocent

Kalkulationsrenten kan fastlægges ved enten:

- Kapitalomkostningsmetoden (omkostningerne til fremskaffelse af kapital f.eks. lån)
- Alternativrenten (mulig gevinst ved alternativ placering af kapitalen).

Ofte fastlægges kalkulationsrenten som den alternative investering med samme risiko, der giver den største gevinst/besparelse.

Eksempel:
Henrik fylder i dag 20 år (1/1-2005). De næste 15 år finansierer Henrik sig vha. en kassekredit/lån og de efterfølgende 10 år har han betydelig overskydende likvide midler.

Antag følgende:

- Effektiv årlig rente på bankbog: 3%.
- Effektiv årlig rente på kassekredit/lån: 10%.
- Effektiv årlig rente på korte obligationer : 8%.
- Beskatning af renteindtægter: 40%.
- Beskatning af renteudgifter: 30%.

Henriks kalkulationsrenter kan nu bestemmes:

- 2005-2020: Henrik finansierer sig vha. kassekredit/lån til en rente på 10%. Han får et skattemæssigt fradrag på 30% af sine renteudgifter. Henriks kalkulationsrente bliver derfor: 10%(1 - 30%) = 7%.
- 2020-2030: Henrik har nu overskydende likviditet. Den bedste forretning han kan få heraf er på korte obligationer, hvor renten er 8%. Dog skal han betale skat af renteindtægterne. Henriks kalkulationsrente bliver derfor: 8%(1 - 40%) = 4,8%.

4.3 Nettobetalingsstrømme (cashflows) - NB

For at vurdere en given investerings fordelagtighed er man nødsaget til at fastlægge investeringens kommende ind og udbetalinger, hvilket kaldes for betalingsstrømme (cashflow). Nettobetalingsstrømmende findes ved summen af ind- og udbetalinger i den givne periode. Fx kan det være dividendeudbetalinger i forbindelse med investering i en aktie eller sparede omkostninger i forbindelse med investering i en ny maskine til produktion

Følgende omkostninger **skal** med i betalingsstrømmene:

- Faste omkostninger, som ændres pga. investeringen skal indgå med deres ændring.
- Alle ind- og udbetalinger, der er forårsaget af investeringen

- Evt. offeromkostninger skal indgå
- Investeringens scrapværdi som værende enten positiv eller negativ ved investeringens udløb
- Working capital eller arbejdskapital, som en udbetaling ved investeringens begyndelse og som er indbetaling ved investeringens udløb/ophør

Følgende omkostninger **skal ikke** medtages i betalingsstrømmene

- Afskrivninger (kun evt. en skatteeffekt)
- Sunk costs / allerede afholdte omkostninger
- Faste omkostninger, der ikke påvirkes af investeringen

4.4 Nettobetalingsstrømme efter skat (cashflow efter skat) – NB efter skat

For at vurdere en given investerings fordelagtighed efter skat, skal cashflow efter skat bestemmes.

Følgende beskattes og skal derfor med i betalingsstrømmene:

- *Salgsindtægter.*

Skattebetaling: Salgsindtægt $\cdot T$
Cashflow efter skat: Salgsindtægt $\cdot (1-T)$

- *Renteindtægter.*

Skattebetaling: Renteindtægt $\cdot T$
Cashflow efter skat: Renteindtægt $\cdot (1-T)$

- *Salg når salgsværdien er større end den resterende nedskrevne saldoværdi:*

Skattebetaling: (Salgspris – Resterende saldoværdi) $\cdot T$
Cashflow efter skat: (Salgspris - Resterende saldoværdi) $\cdot (1-T)$

Følgende giver en skattebesparelse, som skal med i betalingsstrømmene:

- *Omkostninger.*

Besparelse efter skattefradrag: Omkostninger $\cdot T$
Cashflow efter skattefradrag: Omkostninger $\cdot (1-T)$

- *Renteudgifter.*

Besparelse efter skattefradrag: Renter $\cdot T$
Cashflow efter skattefradrag: Renter $\cdot (1-T)$

- *Afskrivninger (indtægt).*

Cashflow efter skattefradrag:	Afskrivninger $\cdot T$

Bemærk: Afskrivninger selv skal ikke med i cashflow kun afskrivningers skatteeffekt. Skatteeffekten er en indtægt, da det er en skattebesparelse!

- *Salg, når salgsværdien er mindre end den resterende saldoværdi (indtægt).*

Besparelse efter skattefradrag:	(Resterende saldoværdi - Salgspris) $\cdot T$
Cashflow efter skattefradrag:	Salgspris + (Resterende saldoværdi - Salgspris) $\cdot T$

4.5 Løbetid T

Løbetiden dækker over den tidsperiode som en investering varer eller dækker. En investering har både en teknisk og en økonomisk levetid. Den økonomiske levetid svarer til den tid det kan betale sig at have en investering/en maskine kørende, hvorimod den tekniske levetid svarer til den tid en maskine faktisk kan køre før den er udbrændt. Ofte så har investeringer en begrænset løbetid pga. f.eks. slitage, teknologisk forældelse og lignende.

4.6 Enkelt investering

Ved en enkelt investering skal alle nettobetalingsstrømmene diskonteres tilbage til T_0, hvorefter det er muligt at vurdere, hvorvidt investeringen er fordelagtig eller ej, hvilket gøres ud fra følgende princip:

4.7 Fundamentalprincip I

> En investering er fordelagtig, hvis nutidsværdien af samtlige betalingsstrømme er større end eller lig 0 ved den valgte kalkulationsrente.

Der er fire metoder at fastlægge dette på

1. Kapitalværdimetoden
2. Annuitetsmetoden
3. Den Interne rentefodsmetode
4. Pay Back metoden

Kapitalværdimetoden

Kapitalværdimetoden er den direkte udnyttelse af fundamentalprincip I. Her beregner man kapitalværdien af investeringen ved at tilbagediskontere alle investeringens ind- og udbetaligner til T_0 med en given kalkulationsrente. Herved kan man vurdere, hvorvidt investeringen forøger investors nytte eller ej. Investeringen er lønsom, hvis kapitalværdien er større end nul.

Formlen ved anvendelse af kapitalværdimetoden:

$$K_0 = I - \Sigma NB_n \cdot (1+R)^{-n}$$

Hvis $K_0 > 0$ er investeringen fordelagtig. Metoden kan bruges i alle situationer.

Eksempel:
Initialinvestering: 100 kr.
Kalkulationsrente: 15%
Nettobetalingsstrømmene er 20 kr. ultimo hvert år de næste 8 år.

Ved hjælp af kapitalværdimetoden kan det vurderes, hvorvidt investeringen er lønsom.

$K_0 = -100 + 20 \cdot \alpha_{8\neg 15\%} = -100 + 20 \cdot 4,4873 = -100 + 89,746 = -10,25$ kr.

Kapitalværdien er mindre end 0, hvorfor investeringen ikke bør foretages.

Annuitetsmetoden

Ved annuitetsmetoden beregnes først investeringens kapitalværdi. Herefter lægges denne ud som en annuitet over hele investeringens løbetid. Er annuiteten positiv, er investeringen fordelagtig.

Annuitetsmetoden er især fordelagtig, når man skal vurdere kædeinvesteringer.

Formlen ved anvendelse af annuitetsmetoden:

$$PMT = K_o \cdot \alpha_{n\neg R}^{-1} >$$

Hvis PMT > 0 er investeringen fordelagtig. Metoden kan bruges i alle situationer.

Eksempel:
Betragt nu en kapitalværdi (K_0) = -10,25 kr. Antag desuden, at investeringen har en levetid på 8 år samt, at kalkulationsrenten er 15%. Annuitetsmetoden kan nu benyttes til at vurdere, om investeringen er lønsom.

$$PMT = K_0 \cdot \alpha^{-1}_{8\neg 15\%} = -10{,}25 \cdot \frac{1}{4{,}4873} = -2.28 \text{ kr.}$$

Da annuiteten er negativ er investeringen ikke fordelagtig.

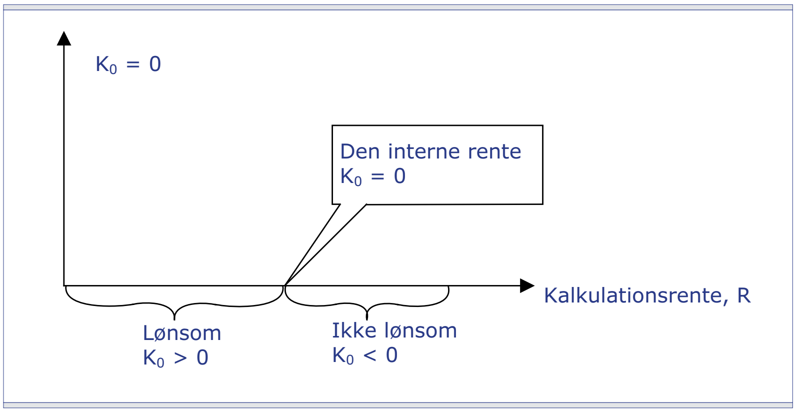
Resultat er det samme, som i eksemplet omhandlende kapitalværdimetoden.

Den interne rentefods metode (internal rate of return; IRR)

IRR er den rentesats, der netop medfører, at investeringens K_0 værdi bliver 0 – se efterfølgende figur. Denne metode er ikke altid anvendelig, da der til tider kan være to eller flere rentesatser, der medfører at investeringens K_0 bliver 0. Hvis der specifikt bliver bedt om investeringens effektive rente er det IRR, der bliver bedt om og denne metode skal derfor anvendes.

$$K_0 = I - \Sigma NB_t \cdot (1+IRR)^{-n} = 0$$

Hvis IRR > kalkulationsrenten er investeringen fordelagtig. Metoden kan dog ikke bruges i alle situationer og bør derfor kun benyttes, når der bliver bedt specifikt om det.



Figuren ovenfor viser K_0 som funktion af kalkulationsrenten. Som det ses af figuren, bliver K_0 større jo mindre kalkulationsrenten er. Når kalkulationsrenten bliver meget stor, dvs. når der kræves en høj forrentning af kapitalen, bliver K_0 negativ. IRR er den rente, der præcis gør, at K_0 = 0. Der fremgår af figuren, at når kalkulationsrenten er mindre end IRR, så er K_0 positiv. Dette er derfor vurderingskriteriet ved brug af denne metode.

Overordnet kan man sige, at den interne rentefods metode **ikke** kan anvendes når:

- Summen af investeringsprojektets indbetalinger er lavere end summen af udbetalingerne
- Der er flere fortegnsskift knyttet til investeringens cashflow. Et typisk eksempel på denne situation er investeringer, som både kræver en udbetaling "her og nu" og har en negativ scrapværdi.

På grund af problemerne med at benytte den interne rentefods metode, bør denne kun benyttes, når der specifikt bliver bedt om det.

Eksempel:
Initialinvestering: 100 kr.
Kalkulationsrente: 15%
Nettobetalingsstrømmene er 20 kr. ultimo hvert år de næste 8 år.

Ved hjælp af Den interne rentefods metode kan det vurderes, hvorvidt investeringen er lønsom.

Vi kan finde den interne rente (IRR) ved at opstille formlen for kapitalværdien og sætte den lig 0.

$K_0 = -100 + 20 \cdot \alpha_{8 \neg IRR} = 0$ kr. Vha. Excel eller en lommeregner kan IRR nu bestemmes.

IRR = 11,81%

Da R > IRR er investeringen ikke fordelagtig. Dvs. der kræves et højere afkast af investeringen, end den kan give.

Pay Back metoden

Pay back metoden beregner hvor lang tid, der går, før et givet investeringsprojekt er tjent ind. Er tilbagebetalingstiden kortere end en given periode, så skal projektet accpeteres.

Nogle forfattere opererer med en kritisk tilbagebetalingstid, som er fastlagt af virksomheden. Dette skal forstås på den måde, at virksomheden f.eks. kan have bestemt, at alle investeringer skal være tilbagebetalt inden 3 år for at være fordelagtige.

Det er vigtigt at holde sig for øje, at betalinger, der ligger ud over den givne periode, ignoreres. Dvs. at et projekt godt kan have en positiv kapitalværdi, men alligevel blive afvist som følge af pay back metoden.

Ved pay back metoden skelner man mellem en dynamisk og en statisk metode, hvor den statiske metode ikke tager hensyn til renten.

Pay back metode – Statisk:

Ved denne metode finder man det tidspunkt, hvor summen af NB overstiger den numeriske værdi af I_0. Dvs. man finder det tidspunkt, hvor investeringen skifter fra negativ til positiv.

Mere præcist kan det defineres således:

En investering er acceptabel, hvis tilbagebetalingsperioden er kortere end en given periode

Går der fx 5 år før summen af NB gør investeringen positiv siges tilbagebetalingstiden at være 5 år. Virksomheden kan så have fastlagt en kritisk tilbagebetalingstid på 4 år, hvorfor et sådant projekt skal afvises.

Formlen for pay back metoden – Statisk:

Akkumuleret værdi = $I_0 + \Sigma NB_n \geq 0$,

hvor n er tilbagebetalingstiden til den akkumulerede værdi er lig eller større end 0 (fx antal år)

Bemærk: Man tager ikke højde for nogen kalkulationsrente i den statiske metode.

Eksempel:
Initialinvestering: 200 kr.
Kalkulationsrente: 15%
Nettobetalingsstrømmene er 86 kr. ultimo hvert år de næste 4 år.

Virksomheden opererer med en kritisk tilbagebetalingstid på 3 år. Dvs. investering skal have skiftet fra negativ til positiv når der er gået maksimalt 3 år.

Ved hjælp af pay back metoden kan det nu vurderes, hvorvidt investeringen skal foretages.

Termin	0	1	2	3	4
Initialinvestering	-200				
NB		86	86	86	86
Akkumuleret		-114	-28	58	144

Det fremgår af ovenstående skema, at den akkumulerede værdi af initialinvesteringen og nettobetalingerne er 58 kr. i år 3. Dvs. i år 3 er investeringen positiv. Da virksomheden opererede med en kritisk tilbagebetalingsperiode på 3 år, og da investeringen er tilbagebetalt inden for denne periode, skal investeringen foretages. År 4 ignoreres, da det ligger uden for den givne kritiske periode.

Opererede virksomheden med en kritisk tilbagebetalingsperiode på 2 år skulle investeringen derimod ikke foretages, da investeringen efter 2 år ikke er tilbagebetalt. Det ses af at den akkumulerede værdi her er negativ (-28 kr.). I sådan et tilfælde skulle både år 3 og år 4 ignoreres.

Pay back metode – Dynamisk

Ved den dynamiske pay back metode tages der hensyn til renten, da alle nettobetalingsstrømme bliver omregnet til nutidsværdier vha. af kalkulationsrenten. Den dynamiske pay back metode er dermed mere retvisende end den statiske.

Bortset fra dette er metoden den samme som ved den statiske. Når summen af de tilbagediskonterede nettobetalinger overstiger den numeriske værdi af initialinvesteringen siges investeringen at være tilbagebetalt. Dvs. det tidspunkt, hvor investeringen vender fra negativ til positiv.

Mere præcist kan det defineres således:

En investering er acceptabel, hvis tilbagebetalingsperioden er kortere end en given periode

Formlen for pay back metoden – Dynamisk:

Akkumuleret værdi = $I_0 + \Sigma NB_n \times (1+R)^{-n} \geq 0$,

hvor n er tilbagebetalingstiden til den akkumulerede værdi er lig eller større end 0 (fx antal år)

Eksempel:
Initialinvestering: 200 kr.
Kalkulationsrente: 15%
Nettobetalingsstrømmene er 86 kr. ultimo hvert år de næste 4 år.

Virksomheden opererer med en kritisk tilbagebetalingstid på 3 år. Dvs. investering skal have skiftet fra negativ til positiv når der er gået maksimalt 3 år.

Ved hjælp af pay back metoden kan det nu vurderes, hvorvidt investeringen skal foretages.

Termin	0	1	2	3	4
Initialinvestering	-200				
NB		86	86	86	86
NB diskonteret		75	65	57	49
Akkumuleret		-125	-60	-4	46

Det fremgår af ovenstående skema, at den akkumulerede værdi af initialinvesteringen og nettobetalingerne er -4 kr. i år 3. Dvs. i år 3 er investeringen negativ – den er ikke betalt tilbage endnu. Da den kritiske tilbagebetalingsperiode er 3 år ignoreres alle betalinger ud over denne periode. Dvs. betalingerne i år 4 skal ignoreres. Da virksomheden opererede med en kritisk tilbagebetalingsperiode på 3 år, og da investeringen ikke er tilbagebetalt inden for denne periode, skal investeringen ikke foretages.

Opererede virksomheden med en kritisk tilbagebetalingsperiode på 4 år skulle investeringen derimod foretages, da investeringen efter 4 år her er tilbagebetalt. Det ses af at den akkumulerede værdi her er positiv (46 kr.).

4.8 Fundamentalprincip II

For at vælge det mest fordelagtige projekt, når man har flere investeringsprojekter at vælge imellem, der gensidigt udelukker hinanden, bør man træffe beslutningen ud fra Fundamtalprincip II, der siger:

> For flere end ét gensidigt udelukkende investeringsprojekt er det mest fordelagtige projekt det, som har den højeste kapitalværdi

De fire metoder, man kan benyttes under Fundamentalprincip I, har andre betydninger, når de vurderes i forhold til Fundamentalprincip II.

De fire metode er:

1. Kapitalværdimetoden
2. Annuitetsmetoden
3. Den Interne rentefodsmetode
4. Pay Back metoden

Der skal under hver metode skelnes mellem om projekterne har:

- Samme levetid
- Forskellig levetid

Kapitalværdimetoden:

Samme levetid: Kan benyttes.
Projektet med den højeste kapitalværdi skal vælges.

Forskellig levetid: Kan benyttes.
Projektet med den højeste kapitalværdi skal vælges

Projektet med den højeste kapitalværdi, skal altid vælges. Dette gælder uanset om de forskellige projekter har forskellig levetid. Kapitalværdien for de enkelte projekter beregnes på samme måde, som under Fundamentalprincip I.

Annuitetsmetoden:

Samme levetid: Her kan annuitetsmetoden benyttes.
Det projekt, som har de højeste annuiteter, skal vælges.

Forskellig levetid: Her kan annuitetsmetoden ikke benyttes.

Annuitetsmetoden anvendes for de enkelte projekter på samme måde, som beskrevet under Fundamentalprincip I.

Den interne rentefods metode:

Metoden kan ikke benyttes under Fundamentalprincip II.

Samme levetid: Kan ikke benyttes.

Forskellig levetid: Kan ikke benyttes.

Pay Back Metoden:

Pay Back metoden bør ikke anvendes under Fundamentalprincip II. Det skyldes primært, at betalinger, der ligger ud over den kritiske tilbagebetalingsperiode, ignoreres.

4.9 Enkelt Kædeinvesteringer / Enkelt gentagen investering

Ved kædeinvesteringer forstås, at en investering gentages i det uendelige. Det vil sige, at den samme investering, med den samme initialinvestering og det samme cashflow gentages periode efter periode. Dette ses dog ekstremt sjældent i virkeligheden.

Er en enkelt investering fordelagtig, vil en kæde af den samme investering også være det. Derfor kan de samme principper, som er beskrevet under Fundamentalprincip I, benyttes til at vurdere, hvorvidt en enkel kædeinvestering er lønsom.

Eksempel:
Et investeringsprojekt løber over 5 år og har en K_0 = 1.000.000 kr. Det er muligt at gentage investeringen i det uendelige. Skal projektet gentages hvert 5. år i det uendelige?

Svaret er ja. Da projektet er lønsomt vurderet ud fra Fundamentalprincip I, vil det også være lønsomt som kædeinvestering.

4.10 Valg mellem flere Kædeinvesteringer / flere gentagne investeringer

Når der er flere mulige gensidigt udelukkende kædeinvesteringsprojekter, skal der vælges mellem dem.

Der skal her betragtes to forskellige situationer:

- De mulige kædeinvesteringsprojekter har samme levetid.
- De mulige kædeinvesteringsprojekter har forskellig levetid.

Samme levetid:

Har de forskellig gensidigt udelukkende kædeinvesteringsprojekter samme levetid, kan de rangordnes som beskrevet under Fundamentalprincip II. Dvs. at kapitalværdimetoden og annuitetsmetoden kan benyttes. Projektet med den højeste kapitalværdi (eller de højeste annuiteter) vælges.

Forskellig Levetid:

Når projekterne har forskellig levetid, kan man benytte kapitalværdimetoden eller annuitetsmetoden til at vurdere, hvilket projekt, der er mest lønsomt.

I sådan et tilfælde defineres grundinvesteringen, som den investering, der skal foretages i det uendelige. Dvs. den initialinvestering og det cashflow, der gentages i det uendelige. En grundinvestering kan fx være en udbetaling på 10.000 kr. nu samt et cashflow på 4.000 kr. de næste 6 år med en kalkulationsrente på 10%.

Kapitalværdimetoden:

Ved denne metode vælges det investeringsprojekt, der har den højeste $K_{0,K}$.

Følgende formel benyttes:

$$K_{0,K} = \frac{K_0}{(1+R)^n - 1} + K_0$$, hvor

$K_{0,K}$ er kædeinvesteringens kapitalværdi,
K_0 er grundinvesteringens kapitalværdi, dvs. når kædeinvesteringen kun foretages én gang,
R er kalkulationsrenten,
n er grundinvesteringens løbetid,

Eksempel:
Projekt A har en initialinvestering på 10.000 kr. og et cashflow på 4.000 kr. de næste 6 år. Projekt B har en initialinvestering på 10.000 kr. og et cashflow på 5.000 kr. de næste 4 år. Kalkulationsrente er 10%. Begge projekter kan gentages i det uendelige, men er gensidigt udelukkende. Hvilket projekt skal vælges?

For at beregne dette findes først K_0 for de to projekter, hvorefter formlen ovenfor benyttes.

Projekt A:

$$K_{0,A} = -10.000 + 4.000 \cdot \alpha_{6 \neg 10\%} = -10.000 + 17.421 = 7.421 \text{ kr.}$$

$$K_{0,K,A} = \frac{7.421}{(1+10\%)^6 - 1} + 7.421 = 17.039 \text{ kr.}$$

Projekt B:

$$K_{0,B} = -10.000 + 5.000 \cdot \alpha_{4-10\%} = -10.000 + 15.849 = 5.849 \text{ kr.}$$

$$K_{0,K,B} = \frac{5.849}{(1+10\%)^4 - 1} + 5.849 = 18.452 \text{ kr.}$$

Det ses, at som kædeinvestering er projekt B mest lønsomt, men som enkeltinvestering er projekt A mest lønsomt. Da projekterne kan gentages i det uendelig, skal projekt B vælges.

Annuitetsmetoden:

Ved annuitetsmetoden lægger man grundinvesteringen kapitalværdi ud som en annuitet over grundinvesteringens løbetid (jf. Fundamentalprincip I).

Da projekterne gentages i det uendelig svarer det til, at man hver termin i det uendelige får denne annuitet. Projektet med den højeste annuitet (PMT) skal derfor vælges.

Formlen herfor svarer til den under kapitlet ”Renter ”:

$$PMT = K_0 \cdot \alpha_{n-R}^{-1} \text{ , hvor}$$

K_0 er grundinvesteringens kapitalværdi.

Eksempel:

Projekt A, der løber over 6 terminer, har en K_0 = 7.421 kr.
Projekt B, der løber over 4 terminer, har en K_0 = 5.849 kr.
Forudsat, at kalkulationsrenten er 10%, at projekterne gensidigt udelukker hinanden og at kalkulationsrenten er 10%, hvilket projekt bør da vælges?

Projekt A:

$$\text{PMT} = 7.421 \cdot \alpha^{-1}_{6 \neg 10\%} = 7.421 \cdot 4,355^{-1} = 1.704 \text{ kr.}$$

Projekt B:

$$\text{PMT} = 5.849 \cdot \alpha^{-1}_{4 \neg 10\%} = 5.849 \cdot 3,17^{-1} = 1.845 \text{ kr.}$$

Da projekt B har en højere annuitet (PMT) end projekt A, skal projekt B vælges.

4.11 Oversigt over beregningsmetoder for investeringsprojekter

Nedenstående skema har til formål at klarlægge, hvilken beregningsmetode man skal bruge i en given fordelagtighedsbetragtning, hvis der er tale om flere gensidigt udelukkende investeringer med ens levetid:

Investeringsform	Kapitalværdi-metoden	Annuitets-metoden	Intern rentefodsmetode	Valggrundlag
Engangsinvestering	Anvendelig	Anvendelig	Ej anvendelig	Højst PV/PMT
Kædeinvestering	Anvendelig	Anvendelig	Ej anvendelig	Højst PV/PMT

Nedenstående skema har til formål at klarlægge, hvilken beregningsmetode man skal bruge i en given fordelagtighedsbetragtning, hvis der er tale om flere gensidigt udelukkende investeringer med forskellig levetid:

Investeringsform	Kapitalværdi-metoden	Annuitets-metoden	Intern rentefodsmetode	Valggrundlag
Engangsinvestering	Anvendelig	Ej anvendelig	Ej anvendelig	Højst PV
Kædeinvestering	Anvendelig (svær)	Anvendelig (let)	Ej anvendelig	Højst PV/PMT

5. Afskrivninger

Afskrivninger er gradvise nedsættelser af et aktivs bogførte værdi i takt med slid, forældelse og lignende. Ved investeringsvurderinger kigger man på de skattemæssige afskrivninger, og det er således disse, der vil blive gennemgået i dette kapitel.

For de afskrivninger, der over driftsregnskabet påvirker skatteopgørelsen, findes særlige regler i afskrivningsloven.

Der findes tre former regnskabsmæssige afskrivninger

1. Saldo afskrivninger
2. Lineære afskrivninger
3. Straks afskrivninger

I de følgende afsnit vil nedenstående være forkortet således:

A = anskaffelsesprisen
R = renten
T = skatteprocenten
S = scrapværdi
D_t = afskrivningen til tidspunktet t

5.1 Saldoafskrivninger

Saldoafskrivninger anvendes ved anlægsafskrivninger såsom produktionsudstyr, maskiner, biler, skibe og driftsmidler. Der kan afskrives med op til 25 % af den resterende saldo årligt.

Afskrivningens størrelse til tidspunktet t findes således:

$$D_t = A \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^{t-1}$$

Den resterende saldo efter afskrivningen til tidspunktet t (D_t), dvs. til tidspunktet t_+:

$$\text{Resterende saldo} = A \cdot 0{,}75^{t}$$

Anskaffelsesværdien efter skat uden afskaffelse (salg), hvis aktivet anskaffes primo perioden dvs. til tidspunkt 0:

$$A_{\text{efter skat}} = A \cdot \left(1 - T \cdot \frac{25\%}{(25\% + R_{\text{efter skat}})}\right)$$

Anskaffelsesværdien efter skat uden afskaffelse, hvis aktivet anskaffes ultimo foregående periode dvs. tidspunkt 0:

$$A_{efter\ skat} = A \cdot \left(1 - T \cdot \frac{25\%}{(25\% + R_{efter\ skat})} \cdot (1 + R_{efter\ skat})\right)$$

Bemærk: I dette tilfælde foretages første afskrivning med det samme, hvorfor alle afskrivninger skal diskonteres en periode mindre.

Anskaffelsesværdien efter skat med scrapværdi (salgsværdi) større end resterende saldoværdi, når salget sker på tidspunktet t_+ (dvs. når afskrivningen til tidspunktet t er foretaget), hvis aktivet anskaffes primo perioden dvs. tidspunkt 0:

$$A_{efter\ skat} = \left(A - S_t \cdot (1 + R_{efter\ skat})^{-t}\right) \cdot \left(1 - T \cdot \frac{0,25}{0,25 + R_{efter\ skat}}\right)$$

Anskaffelsesværdien efter skat med scrapværdi (salgsværdi) mindre end resterende saldoværdi, når salget sker på tidspunktet t_- (dvs. før afskrivningen til tidspunktet t er foretaget), hvis aktivet anskaffes primo perioden dvs. tidspunkt 0:

$$A_{efter\ skat} = \left(A - (1 - T) \cdot S_t \cdot (1 + R_{efter\ skat})^{-t}\right) - T \cdot A \cdot \left(\frac{0,25}{0,25 + R_{efter\ skat}} + \frac{R_{efter\ skat}}{0,25 + R_{efter\ skat}} \cdot \left(\frac{1 + R_{efter\ skat}}{0,75}\right)^{-t}\right)$$

Eksempel:
En produktionsmaskine anskaffes til tiden 0 til A = 2.500.000 kr. Produktionsmaskinen sælges primo år 8 til en scrapværdi på 300.000 kr. Forudsættes T =30% og $R_{\text{efter skat}}$=7% kan anskaffelsesprisen efter skat nu beregnes.

1. Saldoværdien primo år 8 findes som $A \cdot 0{,}75^t = 2.500.000 \cdot 0{,}75^7 = 333.710$

2. Da saldoværdien er mindre en scrapværdien findes $A_{\text{efter skat}}$ som:

$$A_{\text{efter skat}} = \left(A - (1-T) \cdot S_t \cdot \left(1 + R_{\text{efter skat}}\right)^{-t}\right) - T \cdot A \cdot \left(\frac{0{,}25}{0{,}25 + R_{\text{efter skat}}} + \frac{R_{\text{efter skat}}}{0{,}25 + R_{\text{efter skat}}} \cdot \left(\frac{1 + R_{\text{efter skat}}}{0{,}75}\right)^{-t}\right) =$$

$$\left(2.500.000 - (1 - 0{,}30) \cdot 300.000 \cdot (1 + 0{,}07)^{-7}\right) - 0{,}30 \cdot$$

$$2.500.000 \cdot \left(\frac{0{,}25}{0{,}25 + 0{,}07} + \frac{0{,}07}{0{,}25 + 0{,}07} \cdot \left(\frac{1 + 0{,}07}{0{,}75}\right)^{-7}\right) =$$

$$\left(2.500.000 - 210.000 \cdot (1 + 0{,}07)^{-7}\right) - 750.000 \cdot (0{,}78125 + 0{,}21875 \cdot 0{,}083127056) =$$

$$2.369.223 - 750.000 \cdot (0{,}7994340435) = 1.769.647$$

Dvs. $A_{\text{efter skat}}$ = 1.769.647 kr.

5.2 Lineær afskrivning

Ved lineær afskrivning forstås, at man udfører afskrivninger ud fra, hvor lang levetid et aktiv har. Har et aktiv f.eks. en levetid på 15 år så afskrives aktivet årligt med $\frac{1}{15}$ af den oprindelige anskaffelsespris. Afskrivningen til tidspunktet t, D_t, er derfor konstant. Lineære afskrivninger bruges primært på bygninger.

Yderligere to forkortelser er nødvendige:

p = afskrivningens størrelse som procent af anskaffelsessummen (konstant)
n = aktivets levetid

Afskrivningernes størrelse:

$D = D_t = A \cdot p$, hvor

p angiver hvor mange procent af anskaffelsessummen, der afskrives årligt (typisk 5%)

Eksempel:
En bygning anskaffes. A = 10 mio. kr., og der afskrives 5% årligt. Der afskrives derfor pr. år: D = 500.000 kr.

Aktivets levetid:

$n = \frac{1}{p}$, for p = 5% bliver levetiden således: n= $\frac{1}{5\%} = 20$ år

Restværdien efter k afskrivninger:

$$\text{Restværdi} = A - k \cdot D$$

Bemærk: Der må ikke afskrives i det år, hvor et aktiv sælges. Sælges aktivet derfor i år 12 (gælder både primo og ultimo) findes restværdien derfor for k = 11. Jf. eksempel nedenfor. Dette gælder som sagt kun når der er tale om salg.

Skal restværdien efter 12 år findes (evt. som svar på en opgave) benyttes k = 12.

Anskaffelsessummen efter skat:

$$A_{\text{efter skat}} = A - A \cdot T \cdot p \cdot \alpha_{n \neg R_{\text{efter skat}}}$$

Bemærk $A \cdot p = D$

Anskaffelsesværdi efter skat ved scrapværdi større end resterende saldo, såfremt salget sker til tiden t:*

$$A_{\text{efter skat}} = A - A \cdot p \cdot T \cdot \sum_{t=1}^{t^*-1} \left(1 + R_{\text{efter skat}}\right)^{-t} - (1 - T) \cdot \left(1 + R_{\text{efter skat}}\right)^{-t^*} \left(S_{t^*} - D \cdot (n - t^* + 1)\right)$$

Bemærk: Der kan ikke afskrives i det år, hvor salget finder sted. Bemærk: at $A \cdot p = D$.

Eksempel:
Der anskaffes år 0 en bygning, som afskrives med 5% om året. Bygningens levetid er derfor n = 20 år. Bygningen sælges i år 3 til 940.000 kr. Da der ikke må afskrives i det år, hvor salget finder sted, kan restværdien findes som: $A - k \cdot D = 1.000.000 - 2 \cdot 50.000 = 900.000$

Da salgsværdien er større end restværdien kan anskaffelsesværdien efter skat nu bestemmes vha. ovenstående formel.

Bemærk, at t* = 3 og t*-1 = 2.

$$\begin{aligned} A_{\text{efter skat}} &= A - A \cdot p \cdot T \cdot \sum_{t=1}^{t^*-1} \left(1 + R_{\text{efter skat}}\right)^{-t} - (1 - T) \cdot \left(1 + R_{\text{efter skat}}\right)^{-t^*} \left(S_{t^*} - D \cdot (n - t^* + 1)\right) \\ &= 1.000.000 - 1.000.000 \cdot 5\% \cdot 30\% \cdot \left((1 + 0{,}10)^{-1} + (1 + 0{,}10)^{-2}\right) \\ &\quad - (1 - 30\%) \cdot (1 + 0{,}10)^{-3} \left(940.000 - 50.000 \cdot (20 - 3 + 1)\right) = 952.930 \text{ kr.} \end{aligned}$$

Anskaffelsesværdi efter skat ved scrapværdi mindre end resterende saldo, såfremt salget sker til tiden t:*

$$A_{\text{efter skat}} = A - A \cdot p \cdot T \cdot \sum_{t=1}^{t^*-1} \left(1 + R_{\text{efter skat}}\right)^{-t} - T \cdot \left(1 + R_{\text{efter skat}}\right)^{-t^*} \left(D \cdot (n - t^* + 1) - S_{t^*}\right)$$

Bemærk: Der kan ikke afskrives i det år, hvor salget finder sted. Bemærk: at $A \cdot p = D$.

Eksempel:
Som ovenfor, dog er scrapværdien nu 800.000 kr.

$$A_{\text{efter skat}} = 1.000.000 - 1.000.000 \cdot 5\% \cdot 30\% \cdot \left((1+0{,}10)^{-1} + (1+0{,}10)^{-2}\right)$$
$$-(30\%) \cdot (1+0{,}10)^{-3} \left(50.000 \cdot (20-3+1) - 800.000\right) = 951.428 \text{ kr.}$$

5.3 Straks afskrivninger

Straks afskrivninger forekommer ved aktiver, der har en meget kort levetid, hvilket normalt er under 3 år f.eks. EDB. Straks afskrivninger foregår med det samme.

Anskaffelsespris efter skat ved anskaffelse primo.

$$A_{\text{efter skat}} = A \cdot \left(1 - T \cdot \left(1 + R_{\text{efter skat}}\right)^{-1}\right)$$

Anskaffelsespris efter skat ved anskaffelse ultimo.

$$A_{\text{efter skat}} = A \cdot (1 - T)$$

5.4 Genvundne afskrivninger

Hvis aktivet sælges for mere end dets nedskrevne værdi, så skal man betale skat af forskellen mellem salgsprisen og aktivets nedskrevne værdi. Forskellen kaldes for genvundne afskrivninger, fordi man ”vinder” noget af det tilbage, som man har afskrevet.

Genvundne afskrivninger:

$$A_{\text{genvunden}} = \text{Salgspris} - \text{Resterende saldoværdi}$$

6. Leasing

I stedet for at investere i et aktiv kan man lease det. Leasing er derfor en form for finansiering. I en leasingaftale er der to parter. Lessee (lejer) er brugeren af aktivet og lessor (udlejer) er ejeren af aktivet. Lessor udlejer aktivet til lessee og modtager herfor periodiske betalinger.

Der findes to former for leasing. Operationel leasing og finansiel leasing.

Operationel leasing

- Ved operationel leasing forstås en lejeaftale, der er opsigelig med kort varsel. Dvs. at lessee kan opsige kontrakten før dens udløb.
- Operationel leasing foretages ofte af virksomheder for at dække midlertidige behov.
- Leasingaftalens løbetid er kortere end aktivets økonomiske levetid.
- Lessor (udlejer) er ansvarlig for forsikring, skat, vedligeholdelse etc.

Finansiel leasing

- Ved finansiel leasing forstås en lejeaftale der dækker det leasede aktivs økonomiske levetid, ofte uden en option til at opsige aftalen. Dvs. lessee kan ikke opsige aftalen før dens udløb.
- Lessee (lejer) er ansvarlig for forsikring, skat, vedligeholdelse etc.
- Lessee har ofte retten til at forny leasingaftalen.

Hermed en tabel, der angiver forskellene mellem operationel leasing og finansiel leasing.

Grundlag	**Op. Leasing**	**Fin. Leasing**
Lejeaftale	Finansiering og vedligeholdelse	Kun finansiering
Kontraktbrudsmuligheder	Muligt	Ej muligt (oftest)
Løbetid	Lavere end det leasede aktivs økonomiske levetid	Lig det leasede aktivs løbetid
Forkøbsret ved udløb	Forefindes	Kan forefindes
Eksempler	Kopimaskiner, biler, computere	Svært produktionsudstyr, bygninger

Der findes flere grunde til at lease et aktiv frem for at købe det. Nedenfor er angivet nogle af de væsentligste.

- Frigivelse af likviditet
- Større fleksibilitet
    - Findes især ved edb-udstyr, der forældes hurtigt. Ved konstant at indgå korte leasingkontrakter kan lessee sikre sig, at virksomheden konstant er up-to-date med det nyeste inden for edb.
- Risikominimering
    - Hvis der er usikkerhed omkring et aktivs tekniske formåen eller scrapværdi ved leasingkontraktens slutning, kan man flytte denne risiko til lessor ved hjælp af leasing. Ved at lessor ejer aktivet, er det lessor, der står med risikoen for værdiforringelse og lignende. Dette giver god mening, da lessor ofte står for fremstillingen af aktivet og derfor er i stand til at bære denne risiko eller udbedre/ opgradere aktivet.
- Skattemæssig fordel (kun finansiel leasing)
    - Den skattemæssige fordel er langt den vigtigste ved leasing. Skattefordelen fremkommer fordi forskellige virksomheder er i forskellige skattemæssige positioner. Det kan man udnytte til at ved hjælp af leasing.
- Transaktionsomkostningerne kan være lavere
    - Det bedste eksempel findes i forbindelse med leasing af biler, mødelokaler og lignende, der kun skal bruges i kort tid af gangen. Skulle disse købes og sælges hver gang, ville transaktionsomkostningerne blive uforholdsmæssig høje.
- En leasing kontrakt indeholder oftest færre restriktive krav end en lånekontrakt

6.1 Beregning af fordelagtighed

For at udregne, hvorvidt det bedst kan betale sig at lease eller købe kræves der samme risiko for begge alternativer. Der findes flere metoder til fordelagtighedsvurdering. NPV betragtning vil dog kunne løse alle gængse opgaver. Ideen er at se på hvorvidt nutidsværdien af de samlede omkostninger i forbindelse med leasingen overstiger anskaffelsessummen efter skat af aktivet, såfremt det skulle købes.

Det er vigtigt at:

- Huske, at leasingydelser giver et skattemæssigt fradrag.
- Regne på cashflow efter skat.
- Medtage det ved leasingen ”tabte” skattemæssige fradrag fra afskrivninger som man ville have fået ved at vælge købet.
- Medtage en eventuel ”mistet” scrapværdi og dens betydning for anskaffelsessummen efter skat, såfremt aktivet blev købt.

Der findes flere måder til at afgøre, om leasing er fordelagtig eller ej. Nedenfor gennemgås tre forskellige metoder.

Fordelagtighed af leasing 1- Net Advantage to Leasing

Denne metode beregner nutidsværdien af aktivets anskaffelsessum efter skat og trækker leasingydelserne efter skat fra. Hvis denne værdi er større end 0 betyder det, at leasing er billigst, hvorfor det skal vælges.

Følgende forkortelser vil blive brugt:

T = selskabsskatten for den givne virksomhed
t = tidspunkt t
Y_t = det leasede aktivs ydelse på tidspunkt t
A_t = det leasede aktivs afskrivning på tidspunkt t (den afskrivning man havde fået såfremt man købte aktivet)
R = Virksomhedens efter skat lånerente
I_0 = Anskaffelsespris (initialinvestering)

Net Advantage to Leasing kan regnes som følger:

$$NAL = I_0 - \sum_{t=1}^{n} \frac{(1-T)\cdot Y_t + T \cdot A_t}{(1+R)^t}$$ Såfremt NAL > 0 vælges leasing!

Fordelagtighed af leasing 2 – Skema

For at få et overblik over de forskellige cashflow, der er forbundet med leasing, kan det være behjælpeligt at opstille et skema som nedenfor.

		1 termin	2 termin	3 termin	....	n termin
+	Købspris					
-	Leasingydelse efter skat					
-	Værdi af tabte fradragsberettigede afskrivninger					
-	Scrapværdi efter skat					
	Sum					

Bemærk:

- Købsprisen er positiv, da man sparer den ved at lease.
- Leasingydelser efter skat negativ, da man netto betaler dette for at lease.
- Tabte fradragsberettigede afskrivninger er negativ, da man ikke får fradrag for afskrivning, når man leaser.
- Scrapværdi efter skat er negativ, da man ikke opnår denne, når man leaser.

Man kan herefter beregne summen som det samlede cashflow af et lease i forhold til at købe og herefter nutidsværdien heraf. Er denne positiv, kan det bedre betale sig at lease. Metoden er mest velegnet i forbindelse med lineære afskrivninger, da det tabte skattemæssige fradrag er det samme over alle årene.

Fordelagtighed af leasing 3 – NPV betragtning

En sidste metode til beregning af leasings fordelagtighed er en NPV betragtning. Ved denne metode findes først anskaffelsessummen efter skat (jf. kapitel om ”Afskrivninger”) såfremt man købte aktivet. Herefter findes nutidsværdien af leasingydelserne efter skat (jf. kapitel om ”Renter” herunder om annuiteter). De to beløb sammenholdes, og den billigste metode vælges. Husk i begge tilfælde at benytte den korrekte efter skat kalkulationsrente.

Kritisk leasing ydelse

Den kritiske leasing ydelse er netop det beløb, der gør lessee indifferent mellem køb og leasing. Dvs. den ydelse, der gør at:

- NAL = 0
- Nutidsværdien ved brug af skemaet er lig 0
- Anskaffelsessummen efter skat er lig nutidsværdien af leasingydelserne

7. Lån

Står man over for at skulle dække et finansieringsbehov, er det oplagt at tage et lån. Hvilket lån man skal tage afhænger af ens præferencer. Til analyse af, hvilket lån, der er mest fordelagtigt, kan man benytte de samme metoder, som beskrevet i kapitlet "Finansiering". Kriteriet er det samme – dvs. det lån med størst nutidsværdi (= mindst negativt) skal vælges.

Optagelse af lån er forbundet med en række omkostninger. Af denne grund får man ikke udbetalt hele det lån, man optager. Hovedstolen angiver det lån man optager, mens nettoprovenuet angiver, hvor meget man faktisk får udbetalt, dvs. hovedstol minus de forskellige etableringsomkostninger. Af etableringsomkostninger kan nævnes kurstab, gebyr, kurtage, stempelafgift og tinglysningsafgift.

Er der tale om lån i forbindelse med udstedelse af obligationer, kalder man nettoprovenuet for lånets kursværdi. Kursværdien findes som hovedstolen gang kursen til tiden 0.

Man betaler ydelse (dvs. renter og afdrag) i forhold til hovedstolen.

Ydelsen kan defineres således:

Ydelse = Afdrag + Renter

I det følgende benyttes følgende forkortelser:

NB_0 = nettoprovenu = kursværdi
RG_0 = obligationshovedstolen
RG_t = restgælden på tidspunkt t
K_0 = kursen på tidspunkt 0
K_t = kursen på tidspunkt t
Y_t = den t'ende ydelse
A_t = det t'ende afdrag
$R_{effektiv}$ = den effektive rente
$R_{nominel}$ = den nominelle rente
n = antal terminer

Sammenhængen mellem hovedstol og nettoprovenu kan nu defineres:

Hovedstol – Etableringsomkostninger = Nettoprovenu

RG_0 – Etableringsomkostninger = NB_0

Sammenhængen mellem hovedstol og kursværdi kan nu defineres:

Hovedstol gange kurs til tiden 0 = kursværdi

$$RG_0 \cdot K_0 = NB_0$$

7.1 Balanceligningen

Balanceligningen er den ligning, der angiver sammenhængen mellem ydelserne, der betales i forbindelse med lånet, og nettoprovenuet.

Balanceligningen:

$$NB_0 = \sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot \left(1 + R_{effektiv}\right)^{-t}$$

Bemærk: Afhængig af, hvordan cash-flow er opgjort (før/efter skat, faste/løbende priser) bliver renten opgjort ligeså.

Da ydelserne afhænger af hovedstolen, men nettoprovenuet er mindre end hovedstolen, skal ydelserne diskonteres med en rente, der er større end den pålydende rente, for at der er balance i ligningen. Balanceligningen kan derfor med fordel benyttes til at finde den effektive rente på lånet, der netop er den rente, der får balanceligningen til at stemme.

Balanceligningen kan også opstilles på en anden måde, hvis man har med obligationslån at gøre.

Balanceligningen i forbindelse med obligationslån:

$$K_0 \cdot RG_0 = NB_0 = \sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot \left(1 + R_{effektiv}\right)^{-t}$$

Det er principielt det samme der står. Her er blot medtaget, at nettoprovenuet findes som kursværdien, hvilket vil sige hovedstolen gange kursen på obligationerne.

For begge ligninger ovenfor gælder, at diskonterer man ydelserne med den nominelle rente ($R_{nominel}$) i stedet for den effektive rente ($R_{effektiv}$), vil resultatet være hovedstolen.

Ved diskontering med $R_{nominel}$:

$$RG_0 = \sum_{t=1}^{n} Y_t \cdot (1 + R_{nominel})^{-t}$$

7.2 Lån - Forskellige former

De tre mest typiske låneformer er annuitetslån, serielån og stående lån. Disse behandles nedenfor.

I det følgende vil disse benævnelser blive brugt:

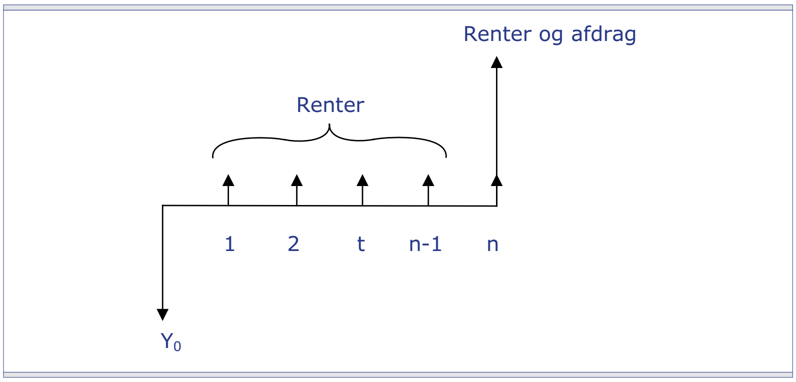
RG_0 = obligationshovedstolen (principal)
RG_t = restgælden på tidspunkt t
K_0 = kursen på tidspunkt 0
K_t = kursen på tidspunkt t
Y_t = den t'ende ydelse
A_t = det t'ende afdrag
$R_{effektiv}$ = den effektive rente
$R_{nominel}$ = den nominelle rente (coupon rate)
n = antal terminer

Når kursen for de forskellige lån beregnes multipliceres kursen med 100%. Dette er en ren notationsmæssig foranstaltning. Ved at gøre dette får man kursen i procent i stedet for i decimaltal (95% i stedet for 0,95). Om man multiplicerer med 100% eller ej spiller ingen rolle rent resultatmæssigt, da 100% jo som bekendt er lig 1.

7.3 Stående lån

Stående lån er den mest benyttede låneform internationalt set.

Et stående lån består af rentebetalinger (coupon payments) over lånets løbetid samt et afdrag i den sidste termin, hvor lånet indfries (jf. nedenstående figur). Afdraget svarer derfor til hovedstolen. Restforløbet af et stående lån er et nyt stående lån.



Figuren viser, at der til tiden 0 er en udbetaling. Herefter følger et antal terminer, hvor der udelukkende betales renter. I den sidste termin indfries lånet ved hjælp af et enkelt afdrag, og der betales også renter i denne termin.

Der findes en række formler, der angiver kurs og ydelse for det stående lån. Disse følger nedenfor.

Kursen på det stående lån til tidspunktet t=0:

$$K_0 = \left(\frac{R_{nominel}}{R_{effektiv}} + \left(1 - \frac{R_{nominel}}{R_{effektiv}}\right) \cdot \left(1 + R_{effektiv}\right)^{-n} \right) \cdot 100\%$$

Husk: $R_{effektiv}$ kan findes ved hjælp af balanceligningen.

Kursen på den resterende del af et stående lån kan findes ved hjælp af nedenstående formel.

Kursen på det stående lån til tidspunktet t:

$$K_t = \left(\frac{R_{nominel}}{R_{effektiv}} + \left(1 - \frac{R_{nominel}}{R_{effektiv}}\right) \cdot \left(1 + R_{effektiv}\right)^{-(n-t)} \right) \cdot 100\%$$

Husk: $R_{effektiv}$ kan findes ved hjælp af balanceligningen.

Obligationshovedstolen findes således:

$$RG_0 = \frac{\textit{Krævet kapital}}{K_0} \cdot 100\%$$

Bemærk: Krævet kapital = nettoprovenu = kursværdi. Læg desuden mærke til, at det ikke er nødvendigt at gange med 100. Dette gør man kun af notationsmæssige årsager, så om kursen angives som 0,95 eller 95 spiller ingen rolle.

Ydelse til tidspunktet t findes således(dog ikke den sidste ydelse, se nedefor):

$$Y_t = RG_0 \cdot R_{nominel}$$

Den sidste ydelse findes således:

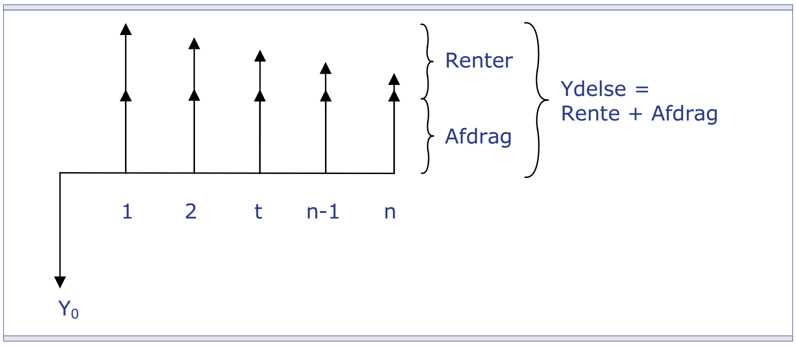
$$Y_{sidste} = RG_0 \cdot (1 + R_{nominel})$$

7.4 Serielån

Serielån er en type lån der har følgende karakteristika over lånets løbetid:

- Afdragene er konstante.
- Rentebetalingerne er faldende.
- Ydelserne er faldende.
- Restforløbet af et serielån er ligeledes et serielån.

Et serielåns afdragsprofil ser derfor ud som vist nedenfor.



Der findes en række formler, der kan være behjælpelige i forbindelse med serielån. De findes i det følgende.

Afdragene hvert år er konstante og bliver således:

$$A_t = RG_0 \cdot \frac{1}{n}$$

Obligationshovedstolen findes således:

$$RG_0 = \frac{\textit{Krævet kapital}}{K_0} \cdot 100\%$$

Bemærk: Krævet kapital = nettoprovenu = kursværdi.

Ydelsen til tidspunktet t findes således:

$$Y_t = \left(\frac{1}{n} + R_{\text{nominel}} \cdot \left(1 - \frac{(t-1)}{n}\right)\right) \cdot RG_0$$

Kursen på serielånet findes således:

$$K_0 = \left(\frac{R_{\text{nominel}}}{R_{\text{effektiv}}} + \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{R_{\text{nominel}}}{R_{\text{effektiv}}}\right) \cdot \alpha_{n\neg R_{\text{effektinv}}}\right) \cdot 100\%$$

Husk: R_{effektiv} kan findes ved hjælp af balanceligningen.

Man kan også finde kursen på et serielån til tidspunktet t.

Kursen på et serielån til tidspunktet t:

$$K_t = \left(\frac{R_{\text{nominel}}}{R_{\text{effektiv}}} + \frac{1}{n-t} \cdot \left(1 - \frac{R_{\text{nominel}}}{R_{\text{effektiv}}}\right) \cdot \alpha_{n-t\neg R_{\text{effektinv}}}\right) \cdot 100\%$$

Husk: R_{effektiv} kan findes ved hjælp af balanceligningen.

Restgælden til tidspunktet t findes således:

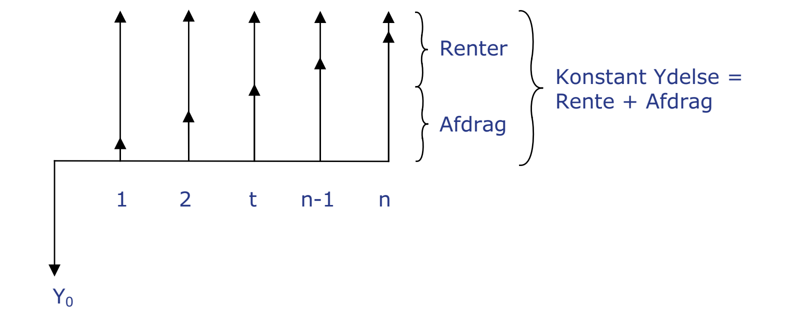
$$RG_t = \left(1 - \frac{t}{n}\right) \cdot RG_0$$

7.5 Annuitetslån

Annuitetslånet er det mest benyttede lån i forbindelse med finansiering af fast ejendom. Det skyldes det faktum, at annuitetslånet har en konstant ydelse pr. termin. Annuitetslånet har følgende karakteristika over lånets løbetid:

- Ydelsen er konstant.
- Renten er faldende.
- Afdragene er stigende.
- Restforløbet af et annuitetslån er ligeledes et annuitetslån.

Et serielåns afdragsprofil ser derfor ud som vist nedenfor.



Som det fremgår af figuren ovenfor, er ydelsen konstant over lånets løbetid. Desuden ses det, hvordan renterne er faldende og afdragene er stigende.

Der findes en række formler, der kan være behjælpelige i forbindelse med annuiteteslån. De findes i det følgende.

Balanceligningen er speciel, når man har med annuitetslån at gøre, da man kan benytte sig af, at lånet, som navnet siger, består af lige store ydelser.

Balanceligningen for annuitetslån:

$$NB_0 = Y \cdot \alpha_{n \neg R_{effektiv}}$$

Obligationshovedstolen findes således:

$$RG_0 = \frac{\text{Krævet kapital}}{K_0} \cdot 100$$

Bemærk: Krævet kapital = nettoprovenu = kursværdi.

Restgælden til tidspunktet t findes således:

$$RG_t = Y \cdot \alpha_{n-t \neg R_{nominel}}$$

Kursen på annuitetslånet findes således:

$$K_0 = \left(\frac{\alpha_{n \neg R_{effektiv}}}{\alpha_{n \neg R_{nominel}}} \right) \cdot 100\% = \frac{NB_0}{RG_0} \cdot 100\%$$

Kursen på et annuitetslån til tidspunktet t:

$$K_t = \frac{\alpha_{n-t \neg R_{effektiv}}}{\alpha_{n-t \neg R_{nominel}}} \cdot 100\%$$

Ydelsen ved et annuitetslån:

$$Y_t = RG_0 \cdot \alpha^{-1}_{n \neg R_{nominel}}$$

Bemærk: Ydelsen Y_t er konstant i hele løbetiden

Der er flere måder at bestemme afdraget til et bestemt tidspunkt i forbindelse med et annuitetslån. Nedgang i restgælden er pr. definition en måde at gøre det på, men der findes også nogle formler, der gør arbejdet lettere. Nedenfor præsenteres to formler, der angiver sammenhængen mellem det første afdraget og afdraget til tiden t samt sammenhængen mellem ydelsen (der er konstant) og afdraget til tiden t.

Afdraget til tidspunktet t:

$A_t = A_1 \cdot (1 + R_{nominel})^t$,
sammenhæng mellem første afdraget og afdraget til tiden t.

$A_t = Y \cdot (1 + R_{nominel})^{-(n+1-t)}$,
sammenhæng mellem ydelsen og afdraget til tiden t.

Bemærk: Det fremgår af den øverste formel ovenfor, at afdragene vokser geometrisk over lånets løbetid.

8. International Finansiering

8.1 Exchange rates – valutakurser

Valutakursen udtrykker, hvor meget af valuta A, der skal til for at købe en enhed af valuta B. For eksempel skal der 4,5 danske kroner til at købe 1 australsk dollar. Dette kan udtrykkes således:

4,5 Dkr. = 1 AUD.

Alternativt kan man udtrykke det ved antallet af australske dollars, der skal til for at købe 1 danske krone:

$$1 \text{ Dkr.} = \frac{1}{4,5} \text{ AUD} \Leftrightarrow 1 \text{ Dkr.} = 0,222 \text{ AUD}.$$

Dvs. der skal ca. 0,222 australske dollars til for at købe 1 danske krone.

Spot transactions:

Spot trade svarer til, at man udveksler valuta straks. Kursen er dagskurs, den såkaldte spot exchange rate.

Forward transactions:

En forward kontrakt specificerer: 1) en given mængde valuta, der skal købes eller sælges, 2) på et givent tidspunkt i fremtiden, 3) til en given kurs (forward exchange rate/forward kursen).

Premium / Discount

Hvis forward kursen overstiger dagskursen siges forward kursen at indehold et premium. Omvendt, hvis den er lavere end dagskursen, siges den at indeholde et discount.

Nedenstående definitioner vil blive anvendt i det følgende:

S_0 = Spotkursen til tidspunktet 0
F_1 = forwardkursen til tidspunktet 1
P = Forward premium (positiv)/discount (negativ)

Forward premium/discount findes vha. nedenstående formel:

$$P = \frac{S_0 - F_1}{F_1}$$

8.2 Cross Rates

Har man kursen på Pund og US Dollars udtrykt i danske kroner, kan man finde kursen mellem Pund og US Dollars ved hjælp af cross rate (krydskursen).

Cross Rate (krydskursen):

$$\text{Værdi af 1 enhed valuta A i udtrykt valuta B} = \frac{\textit{Enheder af valuta B i forhold til 1 enhed af valuta C}}{\textit{Enheder af valuta A i forhold til 1 enhed af valuta C}}$$

Bemærk: Man kan i ovenstående formel lige så vel benytte ”Enheder af valuta B (A) i forhold til 100 enheder af valuta C.”

Eksempel:
Antag følgende:

- 100 Dkr. = 11£
- 100 Dkr. = 15,8982$

Krydskursen (cross rate) mellem € og $ kan nu findes: $\frac{11£}{15{,}8982\$} = 0{,}692£/\$$

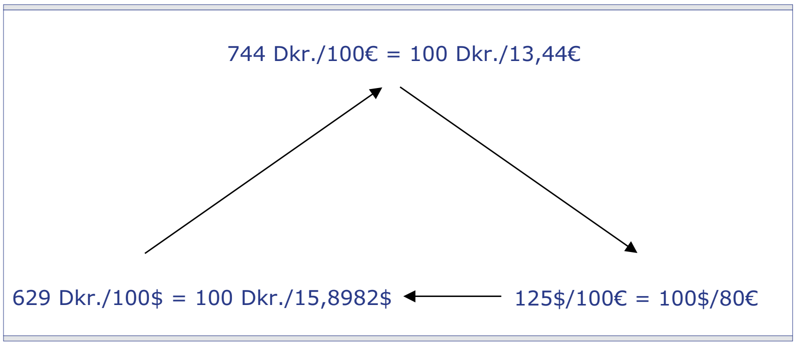
Dvs. værdien af 1 $ er 0,692 £.

Man kan med fordel benytte andre metoder. I dette tilfælde kunne man også have sat 11£ = 15,8982$, og herfra beregnet cross raten.

Er man i tvivl om man har regnet rigtigt, kan man intuitivt ”gætte” sig til, hvilken valuta, der skal være færrest af i cross raten. I dette tilfælde kan man købe 11£ for 100 Dkr. og man kan købe 15,8982$ for 100 Dkr. Det vil sige, at £ er dyrere end $ (da man kan få færre af dem, for samme pris). Derfor må der gælde, at der skal være færre £ end $ i cross raten.

8.3 Triangle arbitrage

Stemmer krydskurserne (cross rates) ikke overens, er der mulighed for triangle arbitrage. Udtrykket kommer af, at man opnår en arbitrage gevinst, ved at spekulere i tre forskellige valutaer og på denne måde opnår en risikofri gevinst. Nedenstående figur illustrerer muligheden for triangle arbitrage.



Ovenstående figur bygger på flg. forudsætninger

- ”Valutaspekulanten” har 100$
- Kurs Dkr./$: 6,29 (kurs $/Dkr.: 0,15898)
- Kurs Dkr./€: 7,44 (kurs €/Dkr.: 0,1344)
- Kurs $/€: 1,25 (kurs €/$: 0,8)

Med udgangspunkt i ovenstående oplysninger kan ”spekulanten” opnå en arbitragegevinst, hvilket forklares nedenfor:

- Med de 100 $ kan ”spekulanten” købe Dkr., hvilket giver:
  100 $ x 6,29 Dkr./$ = 629 Dkr.
- Med de 629 Dkr. kan ”spekulanten” købe €, hvilket giver:
  629 Dkr. x 0,1344 €/Dkr. = 84,54 €
- Med de 84,54 € kan ”spekulanten” købe $, hvilket giver:
  84,54 € x 1,25 $/€ = 105,68 $
- På denne måde opnår ”spekulanten” en arbitragegevinst på 105,68 $ – 100 $ = 5,68 $
- Med de 105,68 $ kan spekulanten gennemføre ovenstående igen og derved forøge de 105,68 $ til 111,67 $. Hver gang ovenstående gennemføres opnår spekulanten en risikofri gevinst på 5,68 %.
- Da gevinsten er risikofri vil efterspørgslen efter $ stige. Dette vil presse prisen på $ op, så den når 1,1829 $/€. Når denne pris er nået, vil der ikke længere være mulighed for triangle arbitrage.

Er man i tvivl om, hvorvidt triangle arbitrage er mulig, skal man blot beregne en enkel krydskurs. Stemmer denne ikke overens med de i opgaven opgivne kurser, er triangle arbitrage mulig.

9. Covered Interest Arbitrage

Udnytter man, at to lande har forskellige risikofri renter samtidig med, at man dækker sin valutakurs risiko, benytter man sig af covered interest arbitrage.

Fx kan man sætte sine penge i Australien til en høj rente på en 90-dages konto samtidig med, at man indgår en forward kontrakt om at sælge australske $ om 90 dage for danske kroner. På denne måde opnår man en høj rente samtidig med, at man undgår valutakursrisiko.

Selvom renten i et andet land er lav, kan covered interest arbitrage godt vise sig at give en gevinst. Hvis renten fx er lavere i Canada, end i Danmark, kan det godt betale sig at sætte sine penge på en konto i Canada, såfremt man kan indgå en forwardkontrakt, med en fordelagtig kurs. På den måde opnår man en højere effektiv forrentning af sine penge, end man ville have gjort i Danmark.

Den effektive forrentning ved covered interest arbitrage:

$$R_{effektiv} = \frac{S_0}{F_1} \cdot \left(1 + R_{fremmed\ valuta}\right) - 1 = \left(1 + P\right) \cdot \left(1 + R_{fremmed\ valuta}\right) - 1$$

hvor $R_{fremmed\ valuta}$ er den forrentning, man kan få i et andet land og P er forward premium.

Eksempel:
Antag følgende:

- Du bor i Danmark og overvejer at investere i Australien
- $R_{Danmark} = 8\%$
- $R_{Australian} = 5\%$
- S_0: 0,25 AUD = 1 Dkr.
- F_1: 0,20 AUD = 1 Dkr.

Du ved, at du kan få 8% i rente i Danmark. Du ønsker at undersøge, om det vil være fordelagtigt at benytte covered interest arbitrage og investere i Australien. Derfor skal den effektive forrentning ved at investere i Australien bestemmes:

$$R_{effektiv} = \frac{0,25}{0,20} \cdot \left(1 + 5\%\right) - 1 = 31,25\%$$

Afkastet ved at investere i Australien er 31,25%. Det skyldes det store forward premium, som den australske dollar udviser.

Aternativt kan den anden formel, der indeholder forward premium, benyttes:

Forward premium er:

$P = \frac{0,25 - 0,20}{0,20} = 25\%$, og hereafter kan den effektive forrentning bestemmes:

$$R_{effektiv} = \left(1 + 25\%\right) \cdot \left(1 + 5\%\right) - 1 = 31,25\%$$

Hvilket er det samme som før.

9.1 Interest Rate Parity

Interest rate parity (IRP) er den betingelse, der skal gælde, såfremt der ikke findes nogen gevinst ved covered interest arbitrage. Nedenfor angives to former for IRP samt en approksimativ formel.

Interest rate parity:

$$P = \frac{(1 + R_{egen\ valuta})}{(1 + R_{fremmed\ valuta})} - 1 \quad \text{alternativt som}$$

$$\frac{F_1}{S_0} = \frac{(1 + R_{fremmed\ valuta})}{(1 + R_{egen\ valuta})}$$

IRP kan også findes approksimativt ved hjælp af nedenstående formel.

Interest rate parity (approksimativt):

$$\frac{(F_1 - S_0)}{S_0} = R_{fremmed\ valuta} - R_{egen\ valuta} \quad \text{alternativt som}$$

$$\frac{(S_0 - F_1)}{F_1} = R_{egen\ valuta} - R_{fremmed\ valuta}$$

Tankegangen er den, at forskellen i to landes renteniveau præcist bliver opvejet af forward kontraktens premium (discount). På denne måde, er det ikke muligt at opnå en højere forrentning, ved at placerer sine penge i et fremmed land og samtidig indgå en forwardkontrakt, end ved blot at placere sine penge i hjemlandet.

9.2 Purchasing Power Parity

Purchasing power parity (PPP) er ideen om, at valutakurser justerer sig således, at købekraften er konstant. Der findes to former for PPP, nemlig absolut PPP og relativ PPP.

Absolute PPP

Absolute PPP er ideen om, at ens varer skal koste det samme i hele verden. Dvs. at bananer skal koste det samme i Danmark og Norge. Hvis en banan koster 5 Dkr. i Danmark og kursen mellem Norge og Danmark er 1 kr. = 1,2 Nkr. Så skal bananen koste $5\ Dkr \cdot 1{,}2\ Nkr / Dkr = 6\ Nkr.$ i Norge.
Dette kan opstilles formelt.

Absolute PPP:

$$P_{fremmed\ land} = P_{hjemland} \cdot S_0$$

For at Absolute PPP skal holde, skal følgende tvivlsomme forudsætninger holde:

- Ingen transaktionsomkostninger
- Fuldstændig identiske varer
- Ingen handelsbarrierer

Relative PPP

Relativ PPP er ideen om, at ændringer i valutakurser er bestemt af inflationsniveauet i de to involverede lande. Ved hjælp af inflationsniveauet kan den forventede valutakurs til tiden t = 1 bestemmes ($E(S_1)$).

Relative PPP:

$$E(S_1) = S_0 \cdot \left(1 + Q_{\text{fremmed land}} - Q_{\text{hjemland}}\right)\text{, hvor}$$

$E(S_1)$ = forventet valutakurs til tiden t = 1
S_0 = spotkursen
$Q_{\text{fremmed land}}$ = inflationen i det fremmed land
Q_{hjemland} = inflationen i hjemlandet

Praktisk talt betyder dette, at spotkursen skal gange med 1 plus en procentsats, som er lige forskellen i inflationsniveauet mellem de to lande. Skal den forventede valutakurs til tiden t = 2 ($E(S_2)$) findes, skal man blot gange $E(S_1)$ med 1 plus forskellen i inflationsniveau igen.

Sagt med andre ord er den procentvise ændring i valutakurserne lig $Q_{\text{fremmed land}} - Q_{\text{hjemland}}$.

9.3 The International Fisher Effect

The international Fisher effect (IFE) er ideen om, at realrenten er ens i forskellige lande. Formel vil det sige at:

IFE:

$$R_{\text{hjemland}} - Q_{\text{hjemland}} = R_{\text{fremmed land}} - Q_{\text{fremmed land}}$$

10. Aktier og Aktiehandel handel

10.1 Aktietyper og aktiekurs

En akties kurs er den værdi, som aktien handles til. En akties pålydende værdi er den værdi, som aktien oprindeligt er udstedt til.

Der findes groft sagt to typer af aktier, A-aktier og B-aktier. Deres egenskaber er opstillet nedenfor.

A-aktier:

- Er den oprindelig aktiekapital.
- Er ofte fordelt på en snæver ejerkreds.
- Høj stemmeret.
- Kaldes også ordinære aktier.

B-aktier:

- Begrænset stemmeret.
- Har fortrinsret til udbytte (når der er tale om præferenceaktier, hvilket er en specielt form for B-aktier).

Uanset hvilken type aktie, der er tale om, gælder der nogle generelle sammenhænge omkring værdien af en aktie – dvs. aktiens kurs.

Aktiens kurs kan bestemmes som nutidsværdien af alle fremtidige dividendeudbetalinger. Modellen tager, på trods af, at man skulle tro det modsatte, højde for kursgevinster.

Nedenstående forkortelser anvendes i det følgende:

D_t = Dividende til tiden t
R = Investors afkastkrav
G = Dividendens vækstrate (%)

Aktiekurs som nutidsværdien af dividendeudbetalinger:

$$\text{Kurs} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_t}{(1+R)^t}$$

Af og til sker det, at dividendeudbetalingerne vokser med en konstant procentsats. Aktiekursen kan derfor bestemmes ved hjælp af formlen for en konstant voksende annuitet.

Aktiekurs ved konstant voksende dividende:

$$\text{Kurs} = \frac{D_1}{R - G}$$

Bemærk: Der er her tale om dividenden til tiden t = 1.

Antages det, at vækstraten er lig 0 (G = 0), har vi med et specieltilfælde af ovenstående at gøre. Dividenden er her konstant og kursen kan derfor bestemmes ved hjælp af formlen for en evigt løbende annuitet.

Konstant dividende:

$$Kurs = \frac{D_1}{R}$$

Bemærk: $D_1 = D_2 = \ldots = D_t$

Ved hjælp af formlen for den konstant voksende dividende, kan investors afkastkrav bestemmes. Dette gøres, ved at isolere R på den ene side af lighedstegnet.

Investors afkastkrav:

$$R = \frac{D_1}{Kurs} + G$$

10.2 Kapitaludvidelse

Som et alternativ til fremmedfinansiering kan der opstå behov for at udvide egenkapitalen. Dette kan man gøre på flere måder. I dette afsnit diskuteres aktieemission til underkurs og fondsaktier.

Aktieemission

Aktieemission betyder, at virksomheden udsteder flere aktier. Der er ofte følgende karakteristika forbundet med en aktieemission:

- Aktionærer har fortegningsret.
  - Dvs. at de har fortrinsret til at købe de nye aktier frem for andre investorer
- Der udstedes tegningsretter. Der er knyttet én tegningsret hver af de gamle aktier.
- Der udstedes et antal nye aktier i forhold til antallet af gamle aktier. Fx i forholdet 1:5 Det betyder:
  - At for her 5 gamle aktier udstedes der 1 ny aktie.
  - At der skal 5 tegningsretter til for at købe (tegne) en ny aktie.
- Der kan handles med tegningsretterne.
- Værdimæssigt er der ingen forskel på at udnytte eller sælge sine tegningsretter.

Der findes en række formler, der kan være behjælpelige, når man betragter kapitaludvidelse.

I det følgende vil nedenstående forkortelse blive brugt:

$K_{før}$ = Kursen før emissionen
K_{efter} = Kursen efter emissionen
$A_{før}$ = Aktiekapitalen før emissionen
A_{efter} = Aktiekapitalen efter emissionen ($A_{før}$ + U)
U = Aktiekapital udvidelsen
E = Emisionskursen
$Antal_{før}$ = Antal aktier før emissionen
$Antal_{nye}$ = Antallet af nye aktier ved emissionen
$Antal_{efter}$ = Antal aktier efter emissionen ($Antal_{før}$ + $Antal_{efter}$)

Først skal man fastlægge, hvor meget man ønsker at udvide aktiekapitalen med. Antallet af nye aktier, der er nødvendige, kan herefter findes.

Antal nye aktier:

$$Antal_{nye} = \frac{\text{Ønsket kapital}}{E}$$

Herefter bestemmes antallet af rettigheder, der er nødvendige for at købe (tegne) en ny aktie.

Antal nødvendige rettigheder:

$$\text{Antal tegninsrettigheder, der er nødvendige for at købe (tegne) en ny aktie} = \frac{Antal_{før}}{Antal_{nye}}$$

Herefter kan kursen på aktierne efter udvidelsen bestemmes.

Kursbestemmelse for aktier efter emission:

$$K_{efter} = \frac{Antal_{før} \cdot Kurs_{før} + Antal_{nye} \cdot E}{Antal_{efter}}$$

Tegningsrettighederne har en værdi. Denne kan ligeledes bestemmes.

Værdien af en tegningsret:

$$\text{Værdien af en tegningsret} = Kurs_{før} - Kurs_{efter}$$

Eksempel:

Aktieselskabet TRJ A/S har en aktiekapital på 10.000 kr. og ønsker at udvide denne til 15.000 kr. TRJ A/S vil derfor foretage en aktieemission med fortegningsret. TRJ A/S har ønsker at udstede aktier til en kurs på 100 pr. aktie. Pt. har findes der 100 TRJ A/S aktier, der alle handles til kurs 180.

Antal nye aktier, der er nødvendige for at fremskaffe den ønskede kapital, kan nu bestemmes.

$$\text{Antal}_{\text{nye}} = \frac{\text{Ønsket kapital}}{\text{E}} = \frac{5.000}{100} = 50$$

Antal rettigheder, der kræves, for at tegne en ny aktie kan nu bestemmes.

$$\text{Antal rettigheder} = \frac{\text{Antal}_{\text{før}}}{\text{Antal}_{\text{nye}}} = \frac{100}{50} = 2$$

Dvs. at der udvides i forholdet 1:2.

Kursen på TRJ A/S aktien kan herefter bestemmes.

$$K_{\text{efter}} = \frac{100 \cdot 180 + 50 \cdot 100}{150} = 153,33$$

Værdien af en tegningsret kan nu bestemmes.

$$= \text{Kurs}_{\text{før}} - \text{Kurs}_{\text{efter}} = 180 - 153,33 = 26,67$$

For en investor med 2 aktier, kan regnskabet gøres op således.

Før emissionen har han 2 aktier, der handles til kurs 180. Den samlede værdi er således 360 kr. Hvis han ønsker at benytte sig af sine 2 tegningsretter, har han mulighed for at tegne en ny aktie til kurs 100. Han vil således have tre aktier med en samlet værdi på 360 kr. + 100 kr. = 460 kr. i aktier. Det ses dog, at den nye kurs er 153,33. Han har derfor tre aktier, der hver har en værdi på 153,33 kr. I alt vil det sige 153,33 · 3 = 460 kr. hvilket stemmer overnes med ovenfor.

Hvis han ikke ønsker at benytte sig af sine tegningsretter, kan han sælge dem til værdien 26,67 kr. pr tegningsret. Gør han det, vil det give ham $26{,}67 \cdot 2 = 53{,}33$ kr. Nu har han dog kun en beholdning på to aktier, der er faldet til kurs 153,33. Hans samlede værdi kan nu opgøres som summen af de to aktier plus det han tjener på at sælge sine tegningsretter, dvs. $153{,}33 + 153{,}33 + 53{,}33 = 360$ kr. hvilket svarer til, hvad han startede med.

Kort sagt kan man sige følgende: Ønsker investor at benytte sine tegningsretter, koster det ham 100 kr., men hans aktiebeholdning stiger ligeledes med 100 kr. Ønsker investor ikke at benytte sine tegningsretter, kan han sælge dem, og hans aktiebeholdning plus værdien af tegningsretterne stiller ham med en samlet beholdning, der er uændret i forhold til før emissionen.

Skemaet nedenfor summerer, hvordan investors beholdning forandres, såfremt han udnytter henholdsvis sælger sin tegningsret.

Før emission	
Antal aktier	2
Kurs	180
Samlet værdi	360
Emissionskurs	100
Antal rettigheder der kræves pr. ny aktie	2
Antal rettigheder, som investor er i besiddelse af	2
Efter emission	
Investor udnytter sin tegningsret	
Antal aktier	3
Kurs	153,33
Samlet værdi	460
Investor sælger sin tegningsret	
Antal aktier	2
Kurs	153,33
Værdi af tegningsretter	26,67
Antal tegningsretter	2
Samlet værdi	360,00

11. Optionsteori

En option er, som den direkte oversættelse fra engelsk til dansk angiver, en mulighed. Begrebet "option" er defineret som rettigheden, men ikke pligten, til at foretage en given handling. Det vil sige, når man har købt en option, har man muligheden for at benytte den. Lade man være med at benytte sin option, sker der ikke noget ved det. Derfor har man rettigheden til at gøre noget, men ikke en pligt. Da man har rettigheden, men ikke pligten, til at benytte sig af optionen, benytter en ejer kun en option, når det er profitabelt.

I forbindelse med værdipapirhandel findes der to former for finansielle optioner kaldet call optioner og put optioner. Køberen af en call eller en put option har følgende rettigheder:

Køber af en call option har:

Retten, men ikke pligten, til at købe et givet aktiv til en aftalt pris for inden et givent tidsinterval.

Bemærk: *Sælger* er derfor forpligtet til at sælge aktivet, hvis køber udnytter optionen.

Køber af en put option har:

Retten, men ikke pligten, til at sælge et givet aktiv til en aftalt pris for inden et givent tidsinterval.

Bemærk: *Sælger* er forpligtet til at købe aktivet, hvis køber udnytter optionen.

En sælger af en option modtager købsprisen for optionen, når han sælger den. Herefter er han *forpligtet* til at sælge/købe (call/put) det givne aktiv, som optionen specificerer, hvis optionen bliver benyttet. Læg mærke til, at sælgeren af en *call optionen* er forpligtet til at *sælge* et givent aktiv, hvis køberen udnytter retten til at *købe.* Modsat gælder ved en *put option.* Her har sælgeren pligt til at *købe* et givent aktiv, hvis køberen udnytter retten til at *sælge*.

En "aktiv" vil i dette tilfælde være et værdipapir – ofte en aktie. Det spiller derfor ingen rolle, om der skrives aktiv eller aktie fremover, da teorien gælder for begge dele.

11.1 Definitioner

Der findes nogle definitioner, der er nødvendige at kende, når man arbejder med optioner.

- Prisen. Prisen som det koster at købe optionen. Kaldes også værdien af optionen.
- Exercise kurs = exercise price = strike prise. Den pris, som det i optionen er aftalt, at det givne aktiv kan handles (købes/sælges) til.
- Udnytte optionen, udnytte sin ret til at sælge/købe aktivet - kaldes også "exercising the option". Det vil sige, når man køber eller sælger det underliggende aktiv, som optionen giver ret til.
- Udløbsdato. Optioner er ikke evigtløbende og skal udnyttes (exercises) inden denne dato (jf. nedenfor om amerikanske og europæiske optioner).
- "Write an option". Når sælgeren sælger en option siger man ofte at sælgeren "writes the option".

Desuden skelner man mellem to typer af optioner: Amerikanske optioner og europæiske optioner. Amerikanske optioner kan exercises på et hvert tidspunkt inden udløbsdatoen, hvorimod europæiske optioner kun kan exercises på selve udløbsdatoen. Dette er den eneste forskel på amerikanske optioner og europæiske optioner. Navnene har således ingen geografisk begrundelse.

Nedenfor gives en oversigt over de væsentligste karakteristika ved optioner:

- Call option: Retten til at købe.
- Put option: Retten til at sælge.
- Europæsik option: Kan kun exercises ved udløb.
- Amerikans option: Kan exercises før udløb.
- Nulsumsspil: Sælgers tab er købers gevinst og omvendt.

I det følgende vil nedenstående forkortelser blive brugt:

P = Værdien af en put-option på tidspunkt 0 = prisen på put optionen
C = Værdien af en call-option på tidspunkt 0 = prisen på call optionen
S_t = Aktiekursen på tidspunkt t
S_0 = Aktiekursen på tidspunkt 0
t = Tiden til udløb
X = Exercise kurs
σ = Standardafvigelsen (volatiliteten) på den underliggende aktie
R_f = Den risikofrie rente

11.2 Gevinstscenarier for optionskøber

Hvis det er profitablet for optionskøber, at exercise optionen, siges optionen at være in-the-money (ITM). Da en køber af en call option har retten til at købe et givent aktiv til en given pris (X) er optionen in-the-money, når exercise prisen (X) er lavere end markedsprisen (S_t). Køberen af call optionen kan således udnytte, at sælger er forpligtet til at sælge ham en aktie til en kurs (X), der er lavere end markedskursen (S_t). Herefter kan køber blot sælge aktien på markedet til markedskursen og dermed tjene profit. Det modsatte gælder for køberen af en put option. Han har rettigheden til at sælge aktien til en given pris. Kommer markedsprisen (S_t) under exerciseprisen (X) er put optionene in-the-money, og køberen af optionen, kan således købe aktien til markedsprisen (S_t) og sælge den videre til den højere exercise pris (X) og dermed tjene profit.

Hvis aktiekursen er lige exerciseprisen siges optionen at være at-the-money (ATM). Her er der ingen gevinst at hente for en køber af en call option eller for køberen af en put option. Optionen siges at være out-of-the-money (OTM), når der er negativ profit at hente, hvis optionen exercises. Det sker for køberen af en call option, når kursen er lavere end exercise prisen og for køberen af en put option når kursen er højere end exercise prisen.

En option kan gennem sin løbetid både nå at være ITM, ATM og OTM.

Nedenfor gives der en oversigt over, hvornår en option er ITM, ATM og OTM henholdsvis. Der er tale om tidspunktet for exercise.

Scenario på exercise tidspunkt	**Call**	**Put**
In the money	S>X	S<X
At the money	S=X	S=X
Out of the money	S<X	S>X

I alle tilfælde vil netto-profitten skulle findes, ved at trække den pris fra, som optionskøberen har betalt for optionen.

Eksempel:
Der findes en europæisk call option på en aktie fra selskabet MHK A/S med følgende karakteristika.

C = 18 kr.
X = 100 kr.
T = 1 måned

Ved køb af sådan en option vil koste 2 kr. Hvis aktiekursen på optionens udløbstidspunkt er over 100 kr., vil der være profit forbundet med optionen, da køber så kan købe en aktie til 100 kr. (X) og sælge den på markedet for over 100 kr. Nedenfor er opstillet forskellige gevinstscenarier afhængigt af kursen på aktien på udløbstidspunktet.

S_t	Optionsværdi	Netto profit
0	0	-18
50	0	-18
75	0	-18
110	10	-8
125	25	7
150	50	32
175	75	57

Hvor:

- Optionsværdi = $S_t - X$
- Nettoprofit = Optionsværdi - C

Der er to ting, man især skal lægge mærke til i ovenstående tabel.

For det første skal optionen altid exercises, når den er ITM. Det vil i dette tilfælde sige, når S_t>X. Dette gælder også selv om nettoprofitten er negativ! Betragt scenariet hvor S_t = 110 kr. Optionen er per definition ITM. Exercises optionen, opnår man en nettoprofit på -8 kr. - altså et tab - hvilket også fremgår af tabellen. Exercises optionen derimod ikke, opnår man en nettoprofit på -18 kr. – altså et større tab, end hvis man ikke exerciser. De -18 kr. er den pris, man oprindeligt betalte for optionen. Således kan man begrænse sit tab ved at exercise optionen. Det korte af det lange er, at en option altid skal exercises, når den er ITM. Det vil sige, at det afhænger af, hvorvidt optionsværdien er positiv, om optionen skal exercises eller ej. Sagt med andre ord, så er de -18 kr. sunk cost, som der ikke skal tages højde for, når det vurderes, hvorvidt optionen skal exercises.

For det andet fremgår det, at det største tab man kan opnå er -18 kr. Altså den pris, som man betalte for optionen. Den største gevinst man kan opnå er derimod uendelig stor.

11.3 Forholdet mellem køber og sælger

Optioner er et nulsumsspil. Det vil sige, at det som køberen af en optioner tjener (taber), det taber (tjener) sælgeren af optionen.

Sælgeren af en option vil altid opnå salgsprisen for optionen. Det er den eneste gevinst, som sælgeren kan opnå. Afhængig af, hvordan aktiekursen udvikler sig, kan sælgeren så risikere at opnå et tab, der overstiger prisen på optionen. Det vil sige, at sælger kan risikere at komme ud med et nettounderskud. Med udgangspunkt i eksemplet ovenfor kan nedenstående gevinstscenarier for køber og sælger opstilles.

	Køber		Sælger	
S_t	Optionsværdi	Netto profit for køber	Profit for sælger	Netto profit for sælger
0	0	-18	18	18
50	0	-18	18	18
75	0	-18	18	18
110	10	-8	18	8
125	25	7	18	-7
150	50	32	18	-32
175	75	57	18	-57

Hvor:

- Profit for sælger = C
- Netto profit for sælger = C – Optionsværdi

Som det fremgår af tabellen ovenfor, er sælgers underskud præcis lig købers overskud (og omvendt). Sælger har dermed begrænset gevinstmulighed (C, i dette tilfælde 18 kr.), hvorimod han teoretisk set har mulighed for et uendeligt stort tab.

11.4 Værdiansættelse af optioner

Optioner kan værdiansættes på et utal af måder. Hermed følger en gennemgang af nogle af de grundlæggende teorier bag værdiansættelse af optioner. Der tages udgangspunkt i en call option hele vejen igennem. Ønsker man derimod at benytte teorien til put optioner, skal put-call pariteten anvendes. Der vil i alle afsnit vedrørende værdiansættelse kun være tale om europæiske optioner.

11.5 Øvre og nedre grænser

Den øvre og den nedre grænse kan umiddelbart defineres for en call option.

Øvre grænse:

$$C \leq S_0$$

Det vil sige, at en call option aldrig kan blive mere værd, end den aktie, den repræsenterer. Optionen giver netop rettigheden til at købe aktien, hvorfor den ikke kan være mere værd, end selve aktien.

Nedre grænse:

$$C \geq \max(S_0 - X, 0)$$

Den nedre grænse er derfor $S_0 - X$ eller 0, afhængig af, hvilken en der er størst. Sagt med andre ord: er $S_0 < X$, er den nedre grænse 0.

11.6 Værdiansættelse af en call option når den med sikkerhed slutter ITM

Når call optionen med sikkerhed slutter in-the-money, kan nedenstående formel benyttes til at fastsætte prisen på call optionen (C).

Værdien af (prisen på) en call option når den med sikkerhed slutter ITM:

$$C = S_0 - \frac{E}{(1 + R_f)}$$

Hvis kursen på aktien er 130, strike prisen er 110 og den risikofri rente er 10% kan værdien af optionen (prisen) på tidspunktet 0 bestemmes til $130 - \frac{110}{1,10} = 30$ kr.

Formlen udledes således:

1. Aktien købes og holdes i en periode. Det koster S_0.
2. En call option på denne aktie købes og et beløb svarende til nutidsværdien af exercise prisen investeres til den risikofri rente. Det koster $C + \frac{X}{(1 + R_f)}$.
3. De to strategier giver samme payoff, uanset hvordan aktiekursen slutter, (dog skal den slutte ITM) og må derfor koste det samme. Prisen på optionen kan udledes residualt ved at sætte de to priserne i 1. og 2. lig hinanden.

Får man oplyst, at aktien kan slutte i fx kurs 120, 125, 130, 135 og 145 kan formlen også benyttes. Den eneste forudsætning for formlen er jo, at optionen slutter ITM. Det er derfor ligegyldigt, hvad sandsynligheden er for de forskellige kurser. Optionens værdi ændres derfor ikke, hvis der er 1% sandsynlighed for at aktien slutter i kurs 120 og 99% sandsynlighed for at aktien slutter i kurs 390 i forhold til, hvis aktien med 100% sikkerhed slutter i kurs 120 (selvom man intuitivt kan forlades til at tro det).

11.7 Værdiansættelse af en call option når den enten slutter ITM eller OTM

En call option, der både kan slutte ITM eller OTM kan også værdiansættes ved hjælp af en formel. Forudsætningen for formlen er blot, at man kender de to kurser, som aktien kan antage. Har man en call option med en X = 100 og ved man med sikkerhed, at aktien slutter i kurs 110 eller i kurs 95, kan formlen således anvendes. Da det dog er sjældent, at man med sikkerhed kender de to kurser, som aktien kan antage i fremtiden, skal formlen blot ses som et teoretisk fundament for værdiansættelse.

Værdien af (prisen på) en call option der slutter enten i kurs S_u eller S_l:

$$C = \frac{S_u - X}{S_u - S_l} \cdot \left[S_0 - S_l \left(1 + R_f\right)^{-t} \right] \text{, hvor}$$

S_u er den højeste aktiekurs (optionen er ITM)
S_l er den mindste aktiekurs (optionen er OTM)
$S_u > X > S_l$

Eksempel:
En aktie i selskabet MHK A/S sælges til kursen 45. Med sikkerhed slutter den i kurs 56 eller i kurs 42 om 1 år. En call option på denne aktie har en strike price på 50. Den risikofri rente er 10%. Værdien af (prisen på) call optionen kan nu bestemmes.

$$C = \frac{56 - 50}{56 - 42} \cdot \left[45 - 42 \cdot (1{,}10)^{-1} \right] = 2{,}92 \text{ kr.}$$

En call option koster således i dette tilfælde 2,92 kr.

11.8 Indvirkning på prisfastsættelse af optioner

I nedenstående tabel kan man se, hvad der sker med ligevægtsprisen for henholdsvis call og put optioner, hvis de påvirkende faktorer stiger. Plus (+) betyder, at ligevægtsprisen stiger, og minus (-) betyder, at ligevægtsprisen falder.

Stigning i:	**Call**	**Put**
S_0	+	-
X	-	+
T	+	+
R_f	+	-
σ	+	+

S_0: Værdien af en call option vil stige, når aktieprisen er høj. Det skyldes, at værdien af optionen jo er S_t - X. En større S_0 øger sandsynligheden for, at S_t er stor, og derfor stiger værdien af call optionen. Det præcis omvendte argument gælder for put optionen, da en put option er ITM, når $S_t < X$.

X: Husk igen på at for en call option er værdien $S_t – X$. Derfor vil en stigning i X medføre, at værdien af call optionen bliver mindre. Det modsatte gælder igen for en put option.

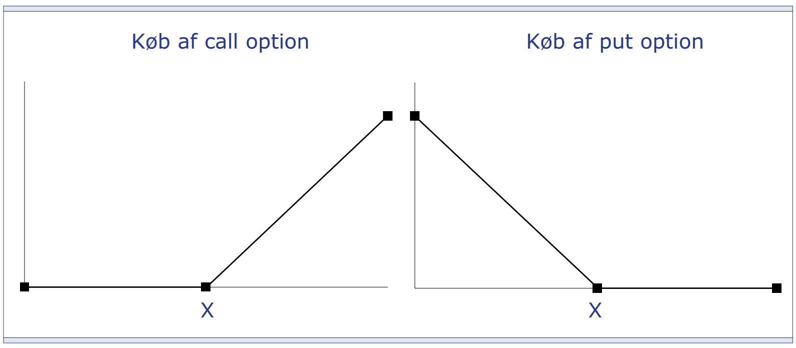
t: Tiden til udløb, t, gælder kun for amerikanske optioner. Da europæiske optioner kun kan exercises ved udløb, behøver en længere løbetid ikke at være positivt korreleret med optionsværdien. I forbindelse med amerikanske optioner vil en forlængelse af løbetiden medføre, at der er mere tid for optionen til at ende ITM. Antag en option, der løber uendeligt. Den må på et eller andet tidspunkt komme ITM. Derfor vil en længere løbetid påvirke værdien af de amerikanske optioner positivt (både put og call optioner).

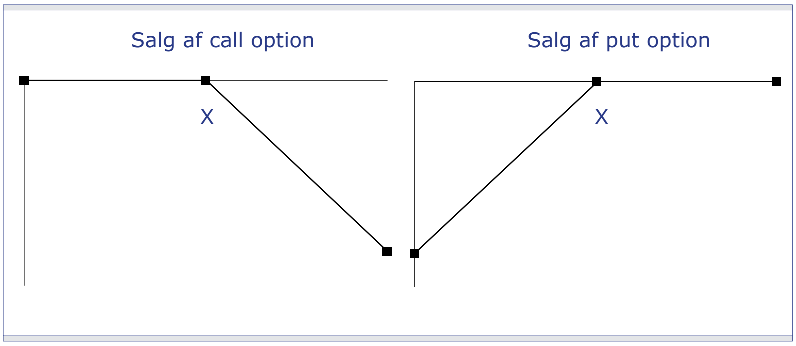
R_f: Groft sagt vil en stigende risikofri rente medføre, at forventningerne til aktiekurserne også stiger. Da værdien af en call option er $S_t – X$ vil en stigende risikofri rente medføre, at det forventes, at S_t også stiger, hvorfor det påvirker værdien af optionen positivt. Modsat gælder det for put optionen. Her vil en stigende risikofri rente medføre, at værdien af put optionen falder. Da put optionen er ITM når $S_t < X$ vil en forventning om stigende S_t medføre, at put optionen har sværere ved at slutte ITM.

σ: Volatiliteten på den underliggen aktie har også betydning for optionens værdi. Stiger volatiliteten øges værdien af både put og call optioner. Volatilitet er et udtryk for, hvor meget og hvor kraftigt aktiekursen svinger. Svinger aktiekursen meget, kan en option komme ”meget ITM”. Svinger aktiekursen kun lidt, kan en option kun komme ”lidt ITM”. I forbindelse med køb af en call optioner er der uendeligt gevinst muligheden, hvorimod tabet er begrænset til den pris, man betaler for optionen (C). Det samme gælder for en put option. En større volatilitet betyder derfor, at gevinst muligheden øges, hvorimod tabet er konstant. Det vil sælgeren af optionen have kompensation for, hvorfor prisen på en option stiger, når volatiliteten stiger.

11.9 Grafisk illustration af værdien af put optioner og call optioner

Værdien af at købe og sælge en call option og en put option kan illustreres grafisk. Dette er gjort nedenfor. Værdien af optionerne (prisen) er op ad 2. aksen mens kursen på aktien er ud ad 1. aksen. For hver figur gælder det derfor, at det er værdien af optionen som funktion kursen på den underliggende aktie. Ved køb af en call option ses det, at når kursen overstiger exercise prisen (X), så er optionen ITM. Optionens værdi stiger derefter lineært med aktiekursen. Ved salg af en call option opnår sælger negativ værdi, når optionen er ITM.





Det ses for alle figurerne, at kurven knækker ved strikeprisen. Det skyldes, at det er når kursen er over/under strike prisen, at optionen er ITM.

For alle figurerne gælder det, at prisen, der er betalt for optionen, ikke er medtaget. Det skyldes, at prisen er sunk cost. Hvis prisen skulle medtages, ville det medføre, at graferne over køb af henholdsvis en call option og en put optioner skulle parallelforskydes nedad med prisen. Graferne over salg af henholdsvis en call option og en put option skulle parallelforskydes opad med prisen.

11.10 Put-Call pariteten

Der findes en fundamental relation mellem prisen på en aktie, call optionen på denne aktie, put optionen på denne aktie, exercise prisen og den risikofri rente. Relationen kaldes put-call pariteten og den kan formuleres formelt således.

Put-Call pariteten:

$$C + \frac{X}{1 + R_f} = S_0 + p$$

Call option + Present value of exercise price =
Stock Price + Put option

Forudsætningerne for benyttelse af put-call pariteten fremgår nedenfor:

- Gælder kun for europæiske optioner.
- Put optionen og call optionen have samme løbetid.
- Put optionen og call optionen have samme exercise pris.
- Put optionen og call optionen skal vedrøre samme underliggende aktie.

Put-Call pariteten kan benyttes til at finde værdien af én af de variable, når de andre er kendte.

Eksempel:
Antag følgende:

$C = 10$
$X = 102$
$R_f = 8\%$
$S_0 = 95$
$P = ?$

Put-Call pariteten kan nu benyttes til at finde værdien af en put option (prisen på put optionen).

$$P = C + \frac{X}{1+R_f} - S_0 = 10 + \frac{102}{1+8\%} - 95 = 9{,}44$$

Værdien af put optionen er derfor P = 9,44.

Put-Call pariteten kan også opfattes som et ”skjult lån”. Antag, at du *sælger* en put option, *sælger* den underliggende aktie samt *køber* en call option.

Formelt ville det se således ud: $P + S_0 - C = \frac{X}{1+R_f}$, når det antages, at de variable, der giver en indtægt, er positive. Betragtes højre side af lighedstegnet ses det, at det der er opnået ved denne strategi, er ”nutidsværdien af X”. Dette kan betragtes som et stående lån med en løbetid på en termin. Efter denne termin skal afdrag + renter betales, hvilket svarer til X.

Hvis du derimod *køber* en put option, *køber* den underliggende aktie samt *sælger* en call option har du udstedt et lån på nutidsværdien af X, som bliver tilbagebetalt efter en termin. Renter og afdrag udgør igen X.

Ovenfor har vi antaget, at der kun forekommer en rentetilskrivning pr. termin. Put-Call pariteten findes dog også med kontinuert rentetilskrivning.

Put-Call pariteten med kontinuerte rentetilskrivninger:

$c + X \cdot e^{-R \cdot t} = S_0 + P$, hvor

e er det naturlige grundtal
R er kontinuerte tilskrevne risikofri rente (= R_f)
t er løbetiden (den resterende løbetid)

Husk: $\ln(e^{-R \cdot t}) = -R \cdot t$, hvilket kan være en hjælp, såfremt renten skal udledes residualt.

11.11 Black & Scholes

Black Scholes har udledt en formel til værdiansættelse af europæiske optioner på ikke-dividende udbetalende aktie. Der findes en formel for både en call option og en put option. Formlerne bygger på en række forudsætninger, der længere nede.

Prisen på en call option:

$$C = S_0 \cdot N(d_1) - X \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(d_2)\text{, hvor}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + \left(R + \sigma^2 / 2\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

R er kontinuerte tilskrevne risikofri rente (= R_f)
t er tiden til udløb opgjort som antal år

Prisen på en put option:

$$P = X \cdot e^{-R \cdot t} \cdot N(-d_2) - S_0 \cdot N(-d_1)\text{, hvor}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / X) + \left(R + \sigma^2 / 2\right) \cdot t}{\sigma \cdot \sqrt{t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \cdot \sqrt{t}$$

R er kontinuerte tilskrevne risikofri rente (= R_f)
t er tiden til udløb opgjort som antal år

Bemærk i begge formler, at N(d) er sandsynligheden for at opnå værdien d eller en mindre værdi i den standardiserede normalfordeling.

Black & Scholes model bygger på en række forudsætninger, som fremgår nedenfor:

- Optionen er en europæisk option dvs. optionen kun kan exercises på udløbsdagen
- Der udbetales ikke dividende på det underliggende aktiv gennem perioden
- Aktieporteføljens værdi udvikles glidende over tid dvs. aktiekurserne må ikke ”springe”
- Den korte rente er kendt og konstant i perioden
- Aktieporteføljens σ er kendt og konstant i perioden
- Der er tale om et effektivt kapitalmarked, hvilket bl.a. vil sige, at der ikke forefindes muligheder for risikofrie arbitragegevinster på kapitalmarkedet
- Der forefindes ingen transaktionsomkostninger
- Alle aktiver på kapitalmarkedet kan handles i uendeligt små mængder
- Aktiepriserne er lognormal fordelte (hvilket vil sige, at markedet er effektivt i semistærk forstand)

Fremgangsmåden ved benyttelse af Black Scholes illustreres bedst ved hjælp af et eksempel.

Eksempel:
Betragt en aktie fra selskabet TRS A/S der handles til kurs $S_0 = 120$. Den risikofri kontinuert tilskrevne rente pr. år er $R_f = 5\%$. En call option med exercise pris E = 110 har udløb om 8 måneder (t = 8/12). Volatiliteten er TRS A/S aktien er σ = 0,4. Prisen på call optionen kan nu beregnes.

Først beregnes d_1 og d_2.

$$d_1 = \frac{\ln(120/110) + \left(0{,}05 + 0{,}4^2/2\right)\cdot(8/12)}{0{,}4\cdot\sqrt{(8/12)}} = 0{,}53$$

$$d_2 = 0{,}53 - 0{,}4\cdot\sqrt{(8/12)} = 0{,}20$$

Herefter $N(d_1)$ og $N(d_2)$.

$N(0{,}53) = 0{,}70$

$N(0{,}20) = 0{,}58$

Slutteligt beregnes prisen på call optionen.

$$C = 120\cdot 0{,}70 - 110\cdot e^{-0{,}05\cdot(8/12)}\cdot 0{,}58 = 22{,}29$$

Prisen på call optionen er således 22,29 kr. Grunden til, at prisen er forholdsvis høj er, at optionen allerede er ITM.

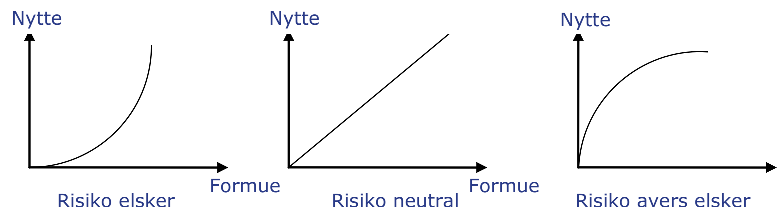
Prisen på en put option med samme karakteristika kan nu bestemmes ved hjælp af put-call pariteten.

$P = C + X\cdot e^{-R\cdot t} - S_0 = 22{,}29 + 110\cdot e^{-0{,}05\cdot(8/12)} - 120 = 8{,}68$ kr.

Benyttes Black Scholes formlen til at værdiansætte put optionen fremkommer samme resultat.

12. Nytte/Risiko

Der skelnes mellem tre former for nyttefunktioner når man taler om nytte



Beregning af forventet nytte

$E(U) = \sum S_x \cdot X_x$, hvor

S_x = sandsynligheden for en specifik hændelse
X_x = nytten af den specifikke hændelse

13. Porteføljeteori – Risiko og Afkast

En investor har et utal af mulige investeringer. Når en investor skal vælge mellem de mange muligheder, gælder det for investor om, at maksimere sin nytte. Den overvejende del af investerings- og finansieringsteori bygger på, at investor er risikoavers, hvilket betyder, at investeringer bedømmes ud fra ”the mean variance rule”.

13.1 The Mean Variance rule

The mean variance rule angiver, hvordan investor vælger mellem to investeringsprojekter:

Har man to investeringsprojekter med samme forventede afkast E_X, så vil investor vælge det projekt, der har den laveste risiko σ_X.

Har man to investeringsprojekter med samme risiko σ_X, så vil investor vælge det projekt, der har det højseste forventede afkast E_X.

Det er derfor nødvendigt at kunne beregne både det forventede afkast og risikoen i forbindelse med en investering. Risikoen kan fx måles som standardafvigelsen, variansen eller beta.

I det følgende vil nedenstående forkortelser blive anvendt:

Y_x = Muligt afkast til tiden/hændelsen/perioden x
S_x = Sandsynligheden for en afkastet Y_x til tiden/hændelsen/perioden x
$E(Y)$ = Forventet afkast på aktiv Y_i
E_{PF} = Porteføljens forventede afkast
P_A = Formueandel placeret i aktiv A
P_B = Formueandel placeret i aktiv B
E_A = Forventet afkast på aktiv A
E_B = Forventet afkast på aktiv B
$R_{A,t}$ = Afkast på aktiv A til tiden t
$R_{B,t}$ = Afkast på aktiv B til tiden t
σ_{PF} = Standardafvigelsen på porteføljens afkast
σ_A = Standardafvigelsen på aktiv As afkast
σ_B = Standardafvigelsen på aktiv Bs afkast
R = Korrelationskoefficient

13.2 Beregning af afkast og risiko

Afkastet ved en investering i et enkelt aktiv beregnes som det vægtede gennemsnit af de mulige afkast.

Forventet afkast:

$$E(Y) = \sum_{x=1}^{n} (S_x \cdot Y_x) \text{, alternativt som}$$
$$E(Y) = S_1 \cdot Y_1 + S_2 \cdot Y_2 + \ldots + S_n \cdot Y_n$$

Risikoen ved en investering kan beregnes som variansen eller standardafvigelsen. For at beregne variansen findes først den kvadrerede forskel fra det forventede afkast. Hver af disse afvigelser multipliceres herefter med den tilhørende sandsynlighed. Standardafvigelsen findes herefter som den positive kvadratrod af variansen.

Varians:

$$\sigma_x^2 = \sum_{x=1}^{n} S_x \left(Y_x - E(Y)\right)^2, \text{ hvor}$$

n er antallet af mulige udfald

Standardafvigelsen kan herefter bestemmes som den positive kvadratrod af variansen.

Standardafvigelse:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

I ovenstående formel for varinsen antages det, at sandsynligheden for de forskellige udfald er kendt. Det er således en form for fremtidig forventet varians, der beregnes. Ønsker man at beregne variansen og har man med historiske afkast at gøre, benyttes derimod formlen for den empiriske varians i stedet.

$$s_x^2 = \frac{\sum_{x=1}^{n}\left[\left(Y_x - \overline{Y}\right)^2\right]}{n-1}, \text{ hvor}$$

$\overline{Y}$ er gennemsnittet af afkastene
n er antallet af afkast

Eksempel:
Betragt aktivet Y med følgende mulige afkast og tilhørende sandsynligheder.

Sandsynlighed	Afkast
0,3	-0,1
0,4	0,2
0,2	0,25
0,1	-0,5

Det forventede afkast samt risikoen i form af variansen og standardafvigelsen kan nu beregnes.

Forventet afkast:

$$E(Y) = 0{,}3 \cdot (-0{,}1) + 0{,}4 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}25 + 0{,}1 \cdot (-0{,}5) = 0{,}05$$

Variansen:

$$\sigma_x^2 = 0{,}3 \cdot (-0{,}1 - 0{,}05)^2 + 0{,}4 \cdot (0{,}2 - 0{,}05)^2 + 0{,}2 \cdot (0{,}25 - 0{,}05)^2 + 0{,}1 \cdot (-0{,}5 - 0{,}05)^2 = 0{,}054$$

Standardafvigelsen:

$$\sigma_x = \sqrt{0,054} = 0,2324$$

For at gøre beregningerne lidt mere overskuelige, kan det betale sig at opstille et skema som dette.

[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
Sandsynlighed	**Afkast**	**Produkt [1] • [2]**	**Forskel mellem forventet afkast og afkast kvadreret**	**Produkt [1] • [4]**
0,3	-0,1	-0,03	$(-0,1-0,05)^2 = 0,0225$	0,00675
0,4	0,2	0,08	$(0,2-0,05)^2 = 0,0225$	0,009
0,2	0,25	0,05	$(0,25-0,05)^2 = 0,04$	0,008
0,1	-0,5	-0,05	$(-0,5-0,05)^2 = 0,3025$	0,03025
		Forventet afkast = 0,05		**Varians = 0,054**

13.3 Portefølje bestående af to aktiver

Man snakker om porteføljer, når investor besidder mere end et enkelt aktiv. Det er oftest tilfældet i virkeligheden. Ligesom med enkelte aktiver kan man med porteføljer beregne forventet afkast, varians og standardafvigelse.

I første omgang betragtes en portefølje bestående af kun to aktiver A og B.

Forventet afkast på portefølje bestående af to aktiver A og B:

$E_{PF} = P_A \cdot E_A + P_B \cdot E_B$, eller alternativt som

$E_{PF} = P_A \cdot E_A + (1 - P_A) \cdot E_B$, da $P_B = P_A - 1$

Variansen på en portefølje bestående af to aktiver A og B afhænger ikke kun af de respektive aktivers varianser. Variansen på porteføljen afhænger også (mere) af kovariansen mellem de to aktiver. Dette kan også opskrives formelt.

Risiko på porteføljen bestående af to aktiver A og B:

$\sigma_{PF}^2 = P_A^2 \cdot \sigma_A^2 + P_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot P_A \cdot P_B \cdot \mathrm{cov}(A,B)$, eller alternativt som

$\sigma_{PF}^2 = P_A^2 \cdot \sigma_A^2 + P_B^2 \cdot \sigma_B^2 + 2 \cdot P_A \cdot P_B \cdot R \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B$ da det gælder at

$\mathrm{cov}(A,B) = R \cdot \sigma_A \cdot \sigma_B$

Som det fremgår af ovenstående formler afhænger porteføljens varians også af kovariansen (cov(A, B)) mellem de to aktiver, der indgår i porteføljen. Det er derfor nødvendigt med en formel for kovariansen.

Den alternative version af porteføljens varians indeholder ikke direkte et udtryk for kovariansen. Derimod indeholder den korrelationskoefficienten, R, som der ligeledes findes en formel for. Kovariansen og korrelationskoefficienten gennegås i næste afsnit.

13.4 Kovarians (cov(A,B)) og Korrelationskoefficienten R

Kovariansen angiver, hvordan afkastet på to aktiver fluktuerer med hinanden. Kovariansen kaldes også for korrelationen. Kovariansen mellem to aktiver er positiv, hvis afkastet på de to aktiver har en tendens til at bevæger sig i samme retning. Det vil sige, at når afkastet på aktiv A stiger, så stiger afkastet på aktiv B ligeså. Derimod er kovariansen negativ, hvis det omvendte er tilfældet.

Kovariansen (teortisk):

$$\mathrm{cov}(A,B) = \sum_{x=1}^{n} S_x \cdot (Y(A)_x - E_A) \cdot (Y(B)_x - E_B)$$

I formlen ovenfor er det den teoretiske kovarians der er beregnet. Dette kan også betragtes som den fremtidige kovarians, da man antager at kende de forskellige fremtidige sandsynligheder og tilhørende afkast. Betrager man historisk data benyttes derimod (som ved variansen på et enkelt aktiv) formlen for den empiriske kovarians.

Empirisk kovarians:

$$\mathrm{cov}(A,B) = \frac{\sum_{x=1}^{n} (Y(A)_x - E_A) \cdot (Y(B)_x - E_B)}{n-1}$$

Bemærk: Benyttes n i nævneren (i stedet for n-1) svarer det til formlen for den teoretiske kovarians, hvor der er lige stor sandsynlighed for alle udfald. Det vil sige, hvor $S_1 = S_2 = \ldots = S_n$.

Kovariansen kan i princippet antage alle værdi mellem uendlig og minus uendelig. Den er derfor fortolkningsmæssig ikke særlig anvendelig. I stedet for kovariansen kan man derfor beregne korr elationskoefficienten. Korrelationskoefficienten er en standardisering af kovariansen, og er derfor nemmere intuitivt at forholde sig til.

Korrelationskoefficienten:

$$R = \frac{cov(A,B)}{\sigma_A \cdot \sigma_B}$$

Korrelationskoefficienten vil altid ligge mellem -1 og 1. korrelationskoefficienten vil næsten altid ligge mellem disse to yderpunkter og angiver dermed graden af negativ eller positiv samvariation mellem de to aktiver. Hvordan korrelationskoefficienten skal fortolkes i ekstremerne fremgår nedenfor.

R = 1: Perfekt positivt korreleret.
R = 0: De to aktiver er uafhængige.
R = -1: Afkastet er perfekt negativt korreleret.

Desuden:

R>1: Der er gevinst ved diversifikation.

13.5 Diversifikation

En portefølje af aktiver vil eliminere en noget af de enkelte aktivers risiko. Således vil porteføljens samlede risiko (målt som varians eller standardafvigelse) være mindre end de enkelte aktivers risiko (såfremt R<1). Betragtes to aktiver, A og B, der hver i sær har et forventet afkast på 20% og som begge har en varians 0,05. Investeres der lige meget i begge aktiver, vil det forventede afkast for porteføljen ligeledes være 20%. Porteføljens varians kan nu bestemmes afhængig af aktivernes korrelationskoefficient, R, således:

$$\sigma^2_{PF(A,B)} = 0,5^2 \cdot 0,05 + 0,5^2 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{0,05} \cdot \sqrt{0,05} \cdot R$$

For R = -1 → $\sigma^2_{PF(A,B)} = 0,025 + 0,025 \cdot -1 = 0$

For R = -0,5 → $\sigma^2_{PF(A,B)} = 0,025 + 0,025 \cdot -0,5 = 0,125$

For R = 0 → $\sigma^2_{PF(A,B)} = 0,025 + 0,025 \cdot 0 = 0,025$

For R = 0,3 → $\sigma^2_{PF(A,B)} = 0,025 + 0,025 \cdot 0,3 = 0,0325$

For R = 1 → $\sigma^2_{PF(A,B)} = 0,025 + 0,025 \cdot 1 = 0,05$

Bemærk, at i alle tilfældene er det forventede afkast fra porteføljen konstant 20%.

Som det fremgår, stiger porteføljens varians, når korrelationskoefficienten stiger. Porteføljen har dog hele vejen igennem en lavere varians end de to aktiver, så længe R<1. Når R = 1 har porteføljen samme varians som de to aktiver. Princippet, som ovenstående illustrerer, er, at man kan opnå et højere afkast og samtidig en lavere varians ved diversifikation. Ved at investere i både aktiv A og aktiv B kan man mindske variansen på sin investering og stadig opnå et forventet afkast på 20%. Des flere aktiver man kombinerer i sin portefølje, des mere risiko kan man diversificere væk. Dette gælder dog kun i et vist omfang. Når porteføljen bliver omfangsrig nok, vil tilføjelsen af flere aktiver ikke medføre, at porteføljens varians falder. Man taler i dette tilfælde om to former for risiko (jf. desuden afsnittet ”Sammenhængen mellem CAPM, systematisk og usystematisk risiko”).

Usystematisk risiko:

Den risiko, der forsvinder ved diversifikation. Den risiko, der er unik for det enkelte aktiv. Kaldes også aktivets unikke risiko

Systematisk risiko:

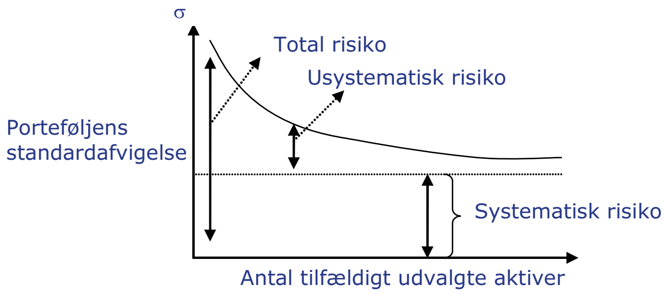
Den risiko, der ikke forsvinder ved diversifikation. Den risiko, der influerer et stort antal aktiver (alle). Kaldes også markedsrisiko.

Der følger heraf, at porteføljer bestående af et tilpas stort antal aktiver stort set ikke indeholder nogen usystematisk risiko.

Et aktivs totale risiko er defineret som summen af den systematiske og den usystematiske risiko

Total risiko:

Total risiko = Usystematisk risiko + Systematisk risiko



Figuren oven for illustrerer, hvordan den total risiko falder i takt med, at der placeres flere og flere aktiver i porteføljen. Herved diversificeres næsten al den usystematiske risiko væk, hvorved det stort set kun er systematisk risiko, der er tilbage i porteføljen, når den bliver omfangsrig nok (dvs. Total risiko ≈ Systematisk risiko).

Bemærk desuden, at der kun kan være én korrelationskoefficient mellem to aktiver A og B. Derfor findes der også kun én varians for porteføljen bestående af de to aktiver.

13.6 Portefølje bestående af mere end to aktiver

Som følge af princippet omkring diversifikation vil investor ofte holde en portefølje bestående af flere end to aktiver. Det er derfor nødvendigt at udvide formlerne for en portefølje bestående af to aktiver til en portefølje bestående af (i princippet uendelig) mange aktiver.

Der er her brug for nogle nye definitioner:

$E(Y_i)$ = Det forventede afkast på aktiv Y_i, hvor i = 1, 2, 3, …, n-1, n.
P_i = Formueandel placeret i aktiv i, hvor i = 1, 2, 3, …, n-1, n.
P_j = Formueandel placeret i aktiv j, hvor j = 1, 2, 3, …, n-1, n.
σ_i^2 = Variansen på afkastet til aktiv i, hvor i = 1, 2, 3, …, n-1, n.
σ_j^2 = Variansen på afkastet til aktiv j, hvor j = 1, 2, 3, …, n-1, n.
Cov(i, j) = Kovariansen på afkastet mellem aktiv i og j, hvor i = 1, 2, 3, …, n-1, n og j = 1, 2, 3, …, n-1, n.

Forventet afkast på portefølje bestående af flere end to aktiver:

$$E_{PF} = \sum_{i=1}^{N} E(Y_i) \cdot P_i \text{ , hvor}$$

n angiver antallet af aktiver i porteføljen

Varians for en portefølje bestående af flere end to aktiver:

$$\sigma_{PF}^2 = \sum_{i=1}^{n} P_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P_i \cdot P_j \cdot \text{cov(i, j)} \text{ , hvor}$$

$i \neq j$
n angiver antallet af aktiver i porteføljen

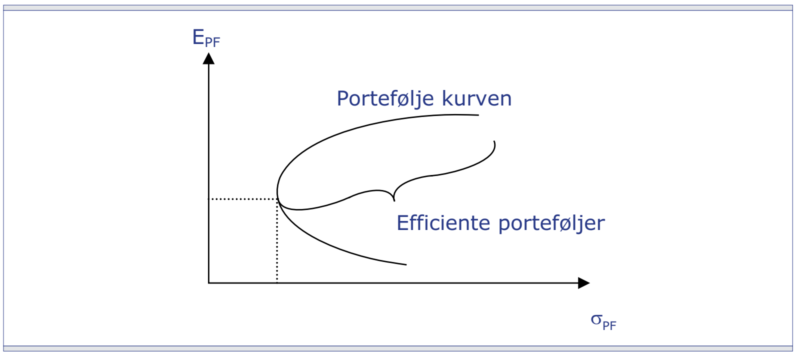
For at overskueliggøre beregningerne kan det være behjælpeligt at opstille en matrix som vist nedenfor. Matrixens størrelse afhænger af antallet af aktiver i porteføljen. Er der tre aktiver i porteføljen, vil matrixen indeholde tre rækker og tre søjler.

For at beregne variansen på porteføljen udregnes blot alle ”boksene” i matrixen, hvorefter disse adderes. Bemærk desuden af cov(i, j) = cov(j, i), hvilket forklarer 2-tallet i formlen ovenfor.

Aktiv i/j	1	2	3	…	n
1	$P_1^2 \cdot \sigma_1^2$	$P_1 \cdot P_2 \cdot cov(1,2)$	$P_1 \cdot P_3 \cdot cov(1,3)$		$P_1 \cdot P_n \cdot cov(1,n)$
2	$P_2 \cdot P_1 \cdot cov(2,1)$	$P_2^2 \cdot \sigma_2^2$	$P_2 \cdot P_3 \cdot cov(2,3)$		$P_2 \cdot P_n \cdot cov(2,n)$
3	$P_3 \cdot P_1 \cdot cov(3,1)$	$P_2 \cdot P_n \cdot cov(2,n)$	$P_3^2 \cdot \sigma_3^2$		$P_3 \cdot P_n \cdot cov(3,n)$
.					
.					
n	$P_i \cdot P_j \cdot cov(i,j)$	$P_i \cdot P_j \cdot cov(i,j)$	$P_n \cdot P_3 \cdot cov(n,3)$		$P_n^2 \cdot \sigma_n^2$

13.7 Porteføljeteori - uden lånemarked

For finde de optimale (efficiente) porteføljer er man nødt til at tegne et koordinatsystem med risiko ud af 1. aksen og forventet afkast opad 2. aksen. I figuren nedenfor er der taget udgangspunkt i en portefølje bestående af to aktiver. Porteføljen kurven angiver de mulige sammenhænge mellem afkast og risiko, der opstår, når der placeres varierende formueandele i de to aktiver, så der opstår forskellige porteføljer. Derved består portefølje kurven af alle de mulig porteføljer, der kan dannes ved at varierer formueandelen i de to aktiver.



Investorer er dog kun interesserede i de efficiente porteføljer. De efficiente porteføljer forefindes på den øverste halvdel af kurven jf. ”the mean variance rule”. Kun disse porteføljer vil rationelle risiko-averse investorer investerer i, da de er efficiente.

Efficient portefølje:

> Den portefølje, der har den mindste standardafvigelse givet forventet afkast samt har det største forventede afkast givet standardafvigelsen.

Den efficiente del af portefølje kurven kaldes også den *efficiente rand*.

Porteføljekursen kan også konstrueres ved at kigge på flere end to aktiver. Fx kan man betragte alle aktiver i markedet eller alle aktiver i KFX indekset. Alle aktiverne vil her være placeret under den efficiente rand, og kombinationer af aktiverne vil danne porteføljekurven og herved også den efficiente rand.

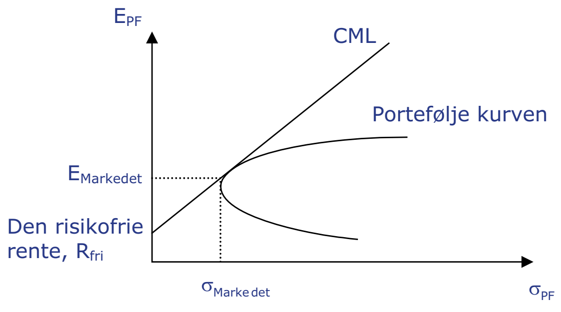
13.8 PF – med lånemarked (CML)

Hvis der forefindes et lånemarked, så har investor udover mulighed for at investere i to eller flere aktiver også mulighed for at låne eller placere kapital til den opgivne risikofrie rente. Dette betyder flere ting for investor:

1. Investor kan placere en del af sin formue i den risikofri rente og en del i en portefølje af aktiver. Gør han dette, får han en mindre risiko og et mindre forventet afkast.
2. Investor kan placere hele sin formue i en portefølje af aktiver og desuden låne til den risikofri rente. Gør han dette får han et højere forventet afkast, men samtidig også en højere risiko. I dette tilfælde gearer investor sin investering.

De porteføljer, der nu er de efficiente, vil være placeret på en såkaldt Capital Market Line (CML-linjen). CML tegnes som tangenten til porteføljekurven og dens begyndelsesværdi (b) er lig den risikofrie rente.

Dette kan illustreres således:



For at markedet skal være i ligevægt, kræves det, at CML tangerer portefølje kurven i den portefølje, der kaldes markedsporteføljen. Dette fremgår også af figuren ovenfor.

Markedsporteføljen:

Den portefølje, der indeholder alle aktiver. Hver aktiv er vægtet med det givne aktivs andel af den totale markedsværdi af alle aktiver i markedsporteføljen.

CML dominerer alle andre porteføljer. Det vil sige, at uanset hvordan investor sammensætter sin portefølje, vil han kunne opnår et højere afkast givet risiko eller en laverer risiko givet afkastet ved at investere i CML. Der findes to måder at investere i CML:

1. Investor kan investere en del af sin formue i markedsporteføljen og resten i den risikofri rente (nedgearet investering).
2. Investor kan investere hele sin formue i markedsporteføljen og låne yderligere kapital som han ligeledes investere i markedsporteføljen (gearet investering).

Gør investor som i 1. vil hans portefølje ligge til venstre for σ_{marked} på CML. Gør han som i 2. vil den ligge til højre for σ_{marked} på CML.

13.9 Udledning af CML

Ønsker man at bestemme sammenhængen mellem afkast og risiko på CML eller ønsker man at finde det forventede afkast for en gearet (eller nedgearet) portefølje, kan man benytte formlen for CML.

CML funktionen udledes ved hjælp af nedenstående formel:

$$\text{CML: } E_{PF} = \frac{E_{marked} - R_{risikofri}}{\sigma_{marked}} x\sigma_{PF} + R_{risikofri} \text{ , hvor}$$

E_{PF} = Porteføljens forventede afkast
E_{marked} = Markedsporteføljens forventede afkast
$R_{risikofri}$ = Den risikofrie rente
σ_{PF} = Standardafvigelsen på porteføljen
σ_{marked} = Standardafvigelsen på markedsporteføljen

13.10 Beta (β)

Forefindes der et lånemarked, hvor investor kan låne eller udlåne til den risikofri rente, så vil investor (altid) investere i en portefølje, der er lokaliseret på CML. Det skyldes som sagt, at porteføljen er efficient, når den er lokaliseret på CML. Det vil sige, at al den usystematiske risiko diversificeres væk, så der kun er systematisk risiko tilbage. Da den usystematiske risiko så at sige forsvinder, er det kun den systematiske risiko, der er relevant for ethvert aktiv. Et aktivs systematiske risiko afhænger af, hvor følsom aktivet er i forhold til bevægelser/ændringer i markedet. Denne følsomhed måles ved hjælp af aktivets beta-værdi (β), som kan beregnes således.

Beta (β):

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(\mathbf{X_i}, X_{marked})}{\sigma^2_{marked}} \text{ , hvor}$$

B_i er aktiv i's beta værdi
cov(X_i, X_{marked}) er kovariansen mellem markedsporteføljen og aktiv i
σ^2_{marked} er variansen på markedsporteføljen

Alternativt kan beta beregnes som:

$$\beta_i = \frac{R\sigma_i}{\sigma_{marked}} \text{ , hvor}$$

R er korrelationskoefficienten mellem markedsporteføljen og aktiv i
σ_{marked} er standardafvigelsen på markedsporteføljen
σ_i er standardafvigelsen på aktiv i

Porteføljer har, som aktiver, også en betaværdi. En porteføljes betaværdi beregnes som det vægtede gennemsnit af aktivernes betaværdier.

Porteføljes betaværdi:

$$\beta_{portefølje} = \sum_{i=1}^{n} P_i \cdot \beta_i \text{ , hvor}$$

$\beta_{portefølje}$ angiver porteføljens betaværdi
β_i angiver aktiv i's betaværdi
P_i angiver formueandelen investeret i aktiv "i"

13.11 Capital Asset Pricing Model (CAPM) og Security Market Line (SML)

Når et aktivs beta værdi er kendt, kan Capital Asset Pricing Model (CAPM) og Security Market Line (SML) benyttes til at fastslå et aktivs forventede afkast.

CAPM:

$$E(X_i) = R_{ridikofri} + \beta_i \left(E_{marked} - R_{risikofri}\right)$$, hvor

$E(X_i)$ er aktiv i's forventede afkast
$R_{risikofri}$ er den risikofri rente
E_{marked} er det forventede markedsafkast
β_i er aktiv i's beta værdi

Af og til kan det være bekvemt at have formlen i en anden form:

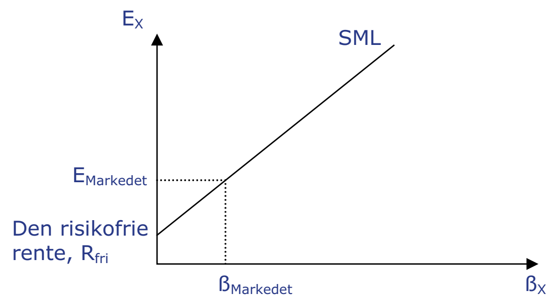
$$\frac{E(X_A) - R_{ridikofri}}{\beta_A} = \frac{E(X_B) - R_{ridikofri}}{\beta_B}$$, hvor

$E(X_A)$ er det forventede afkast for aktiv A
$E(X_B)$ er det forventede afkast for aktiv B
β_A er aktiv A's betaværdi
β_B er aktiv B's betaværdi

Ovenstående sammenhæng gælder, som CAPM, altid. Aktiv A og B kan være alle aktiver. Erstattes A med aktiv i og B med markedsporteføljen kan formlen algebraisk omarrangeres, så den kommer til at stemme overens med den oprindelige CAPM.

Det ses af formlen for CAPM, at der er en lineær sammenhæng mellem risiko og afkast. Denne lineære sammenhæng kaldes for Security Market Line (SML). Her måles risikoen i betaværdier ud af 1. aksen, og det forventede afkast måles op ad 2. aksen.

Dette kan illustreres således:



Formlen for SML er den samme som for CAPM. Skæringen er den risikofri rente og hældningen er $E_{marked} - R_{risikofri}$.

13.12 Sammenhængen mellem CAPM, systematisk og usystematisk risiko

I afsnittet "Diversifikation" er systematisk og usystematisk risiko blevet introduceret. I dette afsnit uddybes sammenhængen mellem de to risiko mål samt CAPM.

Risiko for en portefølje kan opdeles i to dele. Den første del er den del af porteføljens risiko, som kan fjerens ved at kombinere aktiverne i en diversificeret portefølje. Denne diversificerbare del kaldes den usystematiske risiko ($\sigma^{usystematisk}$). Den del, der ikke kan diversificeres, er den del der, ikke kan blive fjernet ved at kombinere aktiverne i en diversificeret portefølje. Dette kaldes systematisk risiko ($\sigma^{systematisk}$). Et aktivs systematiske risiko og usystematiske risiko kan beregnes ved hjælp af formler.

Systematisk risiko, $\sigma_i^{systematisk}$:

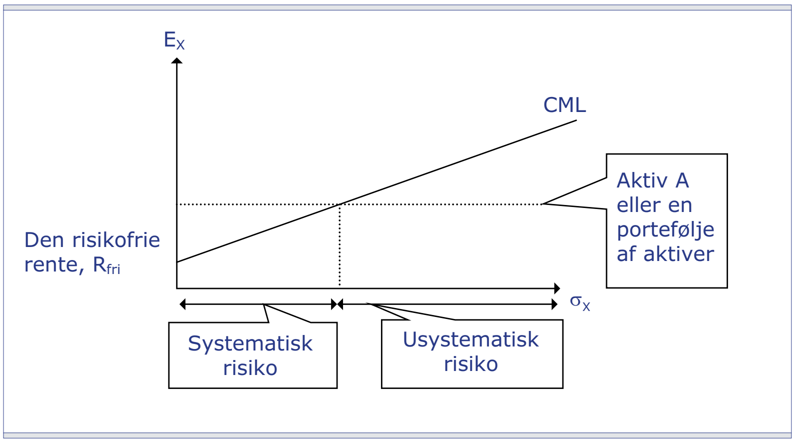
$$\sigma_i^{systematisk} = \beta_i \cdot \sigma_{marked} = \frac{cov(X_i, X_{marked})}{\sigma_{marked}} = \sigma_i \cdot R_{marked,i}$$

Usystematisk risiko, $\sigma_i^{usystematisk}$:

$$\sigma_i^{usystematisk} = \sigma_i - \beta_i \cdot \sigma_{marked} = \sigma_i - \frac{cov(X_i, X_{marked})}{\sigma_{marked}} = \sigma_i \cdot (1 - R_{marked,\,i})$$

I begge tilfælde gælder, at "i" angiver, at der er tale om aktiv "i" (eller portefølje "i"). R angiver som altid korrelationskoefficienten mellem aktiv i og markedet. σ_i betegner standardafvigelsen for aktiv "i" eller portefølje "i" og σ_{marked} standardafvigelsen for markedsporteføljen.

Den systematiske og usystematiske risiko kan illustreres ved hjælp af nedenstående figur.



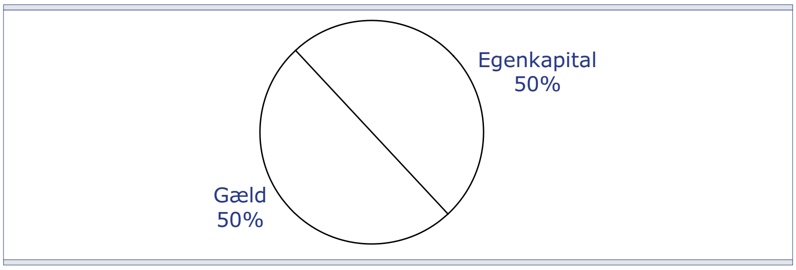
Som det fremgår af figuren, er aktivet (eller porteføljen) ikke efficient (da en efficient portefølje ligger på CML).

14. Kapitalstruktur

En virksomheds kapitalstruktur er virksomhedens sammensætning af passiver. Det vil sige den måde, som virksomheden er fremskaffet sin kapital på. Kapitalstrukturen for en virksomhed er vigtig for investor, da den indgår som en del af værdiansættelsen af virksomheden.

Den optimale kapitalstruktur er den, der maksimerer værdien af virksomheden.

Der benyttes ofte en "pie-model" til at vise en virksomheds kapitalstruktur.



Indenfor kapitalstruktur og –omkostninger forefindes der fire kontekstuelle betragtninger der har betydning for vurderingen af kapitalstruktur:

1. "Ingen skat" betragtninger
2. "Selskabsskat" betragtninger
3. Både selskabs- og personskat
4. Konkursmulighed er til stede

For 1, 2 og 3 gælder følgende antagelser: Ingen konkursrisiko, mulighed for ind- og udlån til den risikofrie markedsrente samt ingen transaktionsomkostninger.

I det følgende vil nedenstående forkortelse blive brugt

V_U = Markedsværdien af en virksomhed uden gæld (unlevered)
V_L = Markedsværdien af en virksomhed med gæld (levered)
E = Markedsværdien af en virksomheds egenkapital
- E_u = Markedsværdien af en virksomheds egenkapital, for en virksomhed uden gæld

D = Markedsværdien af en virksomheds gæld
R_L = WACC = en virksomheds vejede gennemsnitlige kapitalomkostninger
R_U = Virksomhedens kapitalomkostninger hvis den ikke har gæld
R_E = Virksomhedens afkastkrav til egenkapitalen
R_D = Virksomhedens lånerente
T_P = Skattesatsen for renteindkomst
T_K = Skattesatsen for kapitalindkomst
T_C = Virksomhedens skattesats

14.1 WACC (Weighted Average Cost of Capital)

WACC er en betegnelse for virksomhedens gennemsnitlige kapitalomkostninger og kan opdeles i omkostninger til finansiering via egenkapital og finansiering via fremmedkapital.

WACC:

$$WACC = \frac{E}{V} \cdot R_E + \frac{D}{V} \cdot R_C \cdot (1 - T_C)\text{ , hvor}$$

$$V = D + E$$

Bemærk: Er der ingen skat med i betragtninger (Jf ”Miller og Modigliani (M&M) uden skat”) sættes $T_C = 0$.

Husk desuden, at det er *markedsværdien* er gælden og egenkapitalen, der skal bruges i beregningerne.

WACC har en helt speciel implikation.

WACC’en er den kalkulationsrente, der skal benyttes ved vurdering af virksomhedens overordnede cash flow. Derfor vil en virksomheds værdi være maksimeret, når WACC’en er minimeret.

Dette medfører, at en virksomheds optimale kapitalstruktur er den, der minimerer WACC’en.

WACC påvirkes af følgende 2 faktorer:

- *Skattefordelen ved finansiering via fremmedkapital:*
  Når virksomheden finansieres via rentebærende gæld opnås en skattebesparelse, idet renterne – i modsætning til dividendeudbetalingerne – kan trækkes fra i skat ($1-T_C$). Dette betyder med andre ord; jo større debt-equity ratio jo større skattebesparelse.

- *Bankerotomkostninger som følge af finansiering via fremmedkapital:*
  Når virksomheden finansieres via fremmedkapital, skal virksomheden betale renter og afdrag uanset, hvordan virksomheden klarer sig (i modsætning til dividende-udbetalinger). Dette medfører en risiko for, at virksomheden går i betalingsstandsning, hvis virksomheden klarer sig dårligere end forventet. Denne risiko stiger i takt med, at debt-equity ratio øges. Når denne risiko bliver tilstrækkelig høj udløses en række bankerotomkostninger, hvoraf nedenstående er eksempler på såvel direkte som indirekte:

  - *Direkte bankerotomkostninger:*
    Såfremt virksomheden går konkurs medfører dette en lang række administrative omkostninger, herunder advokat salær mm.

  - *Indirekte bankerotomkostninger:*
    Hvis virksomheden er truet af konkurs, vil ledelsen sandsynligvis forsømme virksomhedens daglige drift, idet alle kræfter sættes ind for at undgå konkursen. Derudover er der risiko for, at dygtige og kvalificerede medarbejdere forlader virksomheden.

Den optimale WACC er den mindst mulige, når alle forhold såsom skat og bankerotomkostninger er taget med i betragtningen. Den optimale WACC findes derfor ved den debt-equity ratio, hvor skattebesparelserne ud fra en marginalbetragtning (mindsker WACC) udlignes af bankerotomkostningerne (øger WACC).

Bestemmelse af egenkapitalens og gældens markedsværdi.

14.2 Miller og Modigliani (M&M) uden skat

Miller og Modigliani kommer med to teorier i forbindelse med kapitalstruktur, proposition I og porposition II henholdsvis.

Propostition I tager udgangspunkt i, at der ikke forefindes skatter. Ifølge M&M er der uafhængighed mellem en virksomheds værdi og dens kapitalstruktur. Årsagen er, at det er aktiverne, der skaber værdi i virksomheden og ikke passiverne. To ens virksomheder med forskellig kapitalstruktur har derfor samme værdi.

Proposition I:

Kapitalstrukturen spiller ikke nogen rolle for værdien af en virksomhed
($V_U = V_L$)

Proposition I tager udgangspunkt i, at en virksomheds værdi afhænger af aktiverne og ikke passiverne. Sagt med andre ord, så bliver "pie-modellen" ikke større, bare fordi den inddeles på en anden måde.

Ifølge M&Ms proposition II er en virksomheds egenkapitalomkostninger lineært afhængige af virksomhedens kapitalstruktur. En virksomheds egenkapitalomkostninger stiger når gældssætningen stiger, hvorved den finansielle risiko øges.

Proposition II:

Egenkapitalomkostninger afhænger lineært af kapitalstrukturen.
Det vil sige:

$$R_E = R_L + (R_L - R_D) \cdot \frac{D}{E}$$

14.3 Miller og Modigliani (M&M) med skat

Når der tages skat med i betragtningen af kapitalstruktur, viser det sig, at gæld er fordelagtig frem for egenkapital. Den optimale kapitalstruktur er derfor 100% gæld (0% egenkapital). Proposition I kan nu stilles, når der tages skat med i betragtningen.

Proposition I:

Gæld er fordelagtig frem for egenkapital. Værdien af den gearede virksomhed svarer til værdien af den ugearede virksomhed plus skatteskjoldet:

$$V_L = V_U + D \cdot T_C$$

Når proposition II betragtes med skat sker der kun den ændring, at skatteskjoldet skal med i beregningen af virksomhedens egenkapitalomkostninger. Egenkapitalomkostningerne er således stadig en lineær funktion af kapitalstrukturen.

Proposition II:

Egenkapitalomkostningerne er en lineær funktion af kapitalstrukturen.

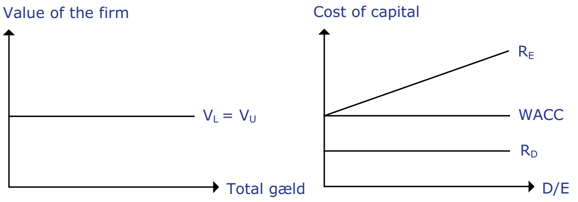
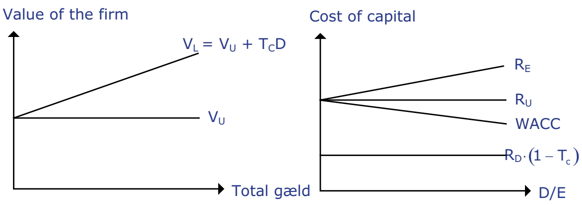
$$R_E = R_U + (R_U - R_D) \cdot \frac{D}{E} \cdot (1 - T_C)$$

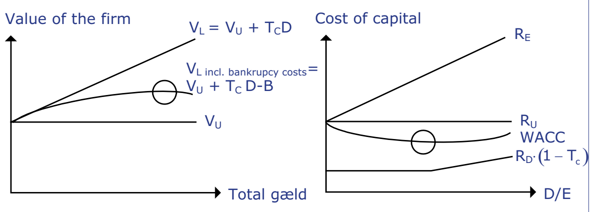
14.4 Business Risk og Financial Risk

Ved at betragte M&Ms proposition II indses det, at den krævede egenkapitalforrentning afhænger at to led. Det svarer til at opdele virksomhedens risiko i business risk og financial risk. Sammenhængen fremgår af tabellen nedenfor.

	Business Risk	Financial Risk
Uden skat	$R_L = WACC$	$(R_L - R_D) \cdot \frac{D}{E}$
Med skat	R_U	$(R_U - R_D) \cdot \frac{D}{E} \cdot (1 - T_C)$

De 4 kontekstuelle betragtninger

	Ingen skat
Virksomhedens værdi	$V_U = V_L$ = PV(fremtidigt cashflow) $V_L = D + E_L$ $V_U = E_U$
Den optimale sammensætning	Ligegyldigt ifølge M&M1
Grafisk	
Mekanisme	M&M II: WACC = $\frac{E}{V}\cdot R_E + \frac{D}{V}\cdot R_D$ $R_E = R_L + (R_L - R_D)\cdot\frac{D}{E}$ Ovenstående viser at selvom gæld er ”billigere” (fx i form af lavere afkastkrav) end egenkapital, vil besparelsen ved øget gældsætning blive udlignet af en proportionelt øget egenkapitalomkostning. WACC’en er konstant uanset kapitalstruktur.
	Selskabsskat
Virksomhedens værdi	$V_L = V_U + D\cdot Tc$ $V_U = E_U$
Den optimale sammensætning	100% gæld, da gæld giver skattefradrag
Grafisk	
Mekanisme	M&M II med skatter: WACC = $\frac{E}{V}\cdot R_E + \frac{D}{V}\cdot R_D\cdot(1-T_C)$ $R_E = R_U + (R_U - R_D)\cdot\frac{D}{E}\cdot(1-T_C)$ I denne situation bliver besparelsen ved øget gældssætning endnu større (igennem skattefradraget), og hermed opvejes det ikke fuldt ud af de øgede egenkapitalomkostninger. Det vil sige, jo mere gæld, des lavere bliver WACC og des mere bliver virksomheden værd. Implikation: Gæld er godt, meget gæld er meget godt!
	Både selskabs- og personskat
Virksomhedens værdi	$V_L = V_U + D\cdot\left(1-\frac{(1-T_C)\cdot(1-T_K)}{(1-T_P)}\right)$
Den optimale sammensætning	Gælden bør optages der hvor størst muligt fradrag kan opnås: Hvis $(1 - T_C) \times (1 - T_K) < (1 - T_P)$ -> Fremmedfinansiering foretrækkes Hvis $(1 - T_C) \times (1 - T_K) > (1 - T_P)$ -> Egenkapitalfinansiering foretrækkes Hvis $(1 - T_C) \times (1 - T_K) = (1 - T_P)$ -> Ligegyldigt, om der finansieres primært med egenkapital eller fremmedkapital
Ræsonnement	Antag, at virksomheden udbetaler X kr. enten som rente til en obligationsholder (1) eller som dividende til en aktionær (2). (1) Obligationsholderen modtager $X\cdot(1-T_P)$. Virksomheden betaler ikke skat af rentebetalinger/renteudgifter, men obligationsholderen betaler skat af renteindtægt. (2) Aktionæren modtager $X\cdot(1-T_C)\cdot(1-T_K)$. Først betaler virksomheden selskabsskat (T_C) og herefter betaler aktionæren skat af kapitalindkomsten (T_K).
Mekanisme	Det afhænger af ligningerne ovenfor, hvilken kapitalstruktur, der er at foretrække. Problemet er dog, at der ikke findes én personlig skattesats. Derfor kan det ikke umiddelbart siges, hvordan ulighedstegnet skal vende i ovenstående ligninger.

	Med konkursomkostninger
Virksomhedens værdi	$V_L = V_U + T_C \cdot D\text{-}B$, hvor B angiver nutidsværdien af bankerotomkostningerne.
Den optimale sammensætning	Afhænger af ved hvilken sammensætning af gæld og egenkapital at udtrykket $T_C \cdot D\text{-}B$ maksimeres.
Grafisk	
Mekanisme	Gæld øger værdien af virksomheden (sænker WACC) op til et vist punkt. Når det punkt nås bliver fordelen ved gæld mere end opvejet af de stigende bankerotomkostninger og en øget gældssætning vil mindske værdien af virksomheden (øge WACC). Den optimale kapitalstruktur forefindes i grafen ovenfor ved "O". I dette punkt er WACC'en minimeret og værdien af virksomheden maksimeret. Afkastkravet på egenkapitalen gælder stadigvæk. $R_E = R_U + (R_U - R_D) \cdot \frac{D}{E} \cdot (1 - T_C)$ Implikation: Gæld er godt, meget gæld er ikke godt!

Bestemmelse af egenkapitalen og gældens markedsværdi

Markedsværdien af egenkapitalen svarer til markedsværdien af virksomhedens udestående aktier og kan således beregnes som antal udestående aktier gange kursen.

Markedsværdien af virksomhedens gæld/obligationer kan beregnes ved at finde nutidsværdien af de tilbagediskoterede afdrag og renter. Kalkulationsrenten er den rente, som virksomheden skal betale på nye lån, det vil sige den krævede forrentning på nye lån.

Bestemmelse af kapitalomkostningerne

Omkostningerne ved egenkapital kan, foruden som beskrevet ovenfor, bestemmes ved hjælp af tidligere beskrevet modeller. Fx kan modellen for konstant voksende dividende benyttes til at finde egenkapitalomkostningerne. Dette gøres ved at omarrangerer formlen for konstant voksende dividende så kalkulationsrenten (her: egenkapitalomkostningerne) isoleres.

Egenkapitalomkostninger ved konstant voksende dividende:

$$R_E = \frac{D_1}{Kurs} + G \quad \text{, hvor}$$

D_1 er dividende til tidspunktet t = 1
G er den konstante procentvise vækst i dividendeudbetalingerne

Omkostningerne ved optagelse af gæld kan som beskrevet estimeres ved at observere den rente, som virksomheden skal betale ved optagelse af nye lån. Alternativt kan renten, som lignende virksomheder skal betale på nye lån benyttes. Tages skatter med i betragtningen skal gældens afkastkrav korrigeres for dette. Dette gøres ved at gange renten med (1 - T_C).

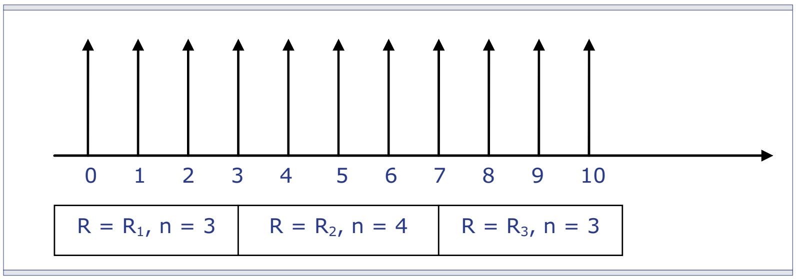
14.5 Optimal kapitalstruktur

Det er ikke umiddelbart muligt at definere en optimal eller perfekt kapitalstruktur. Generelt gælder der dog nogle tommelfingerregler, som bør overholdes.

- Des mere volatil en virksomheds indtjening er, des mindre gæld bør den stifte.
- Virksomheder der primært består af immaterielle aktiver bør stifte mindre gæld, end virksomheder der består af materielle aktiver. Det ses fx ofte, at virksomheder, der primært beskæftiger sig med forskning, ikke har meget gæld.

15. Appendiks – Flere kalkulationsrenter og α

Regnes der med annuiteter, og er der flere forskellige kalkulationsrenter over n terminer, påvirker det, hvordan α skal beregnes. Betragt nedenstående tidsforløb, hvor tre forskellige perioder med tre forskellige tilhørende kalkulationsrenter er angivet. Desuden er perioderne af forskellig længde.



α -værdien for hele tidsforløbet kan nu beregnes således:

$$\alpha_{n\neg R}(\text{total}) = \alpha_{3\neg R1} + \alpha_{4\neg R2} \cdot (1+R_1)^{-3} + \alpha_{3\neg R3} \cdot (1+R_2)^{-4} \cdot (1+R_1)^{-3}$$

Det første led på højre side af lighedstegnet er den ”normale” måde at beregne alfa på for tre terminer til tiden t = 0. Det næste led svarer til at beregne en alfa-værdi for 4 terminer til tiden t = 3. da vi skal bruge alfa-værdien for t = 0 skal denne alfa-værdi tilbagediskonteres over tre terminer med renten R_1 (da det er kalkulationsrenten over disse tre perioder). Det sidste led svarer til at beregne en alfa-værdi for tre terminer til tiden t = 7. Da vi skal bruge alfa-værdien for t = 0 skal den tilbagediskonteres – først over fire terminer med renten R_2 og dernæst over tre terminer med renten R_1. Slutteligt lægges de ”enkelte” alfa-værdier sammen, og den totale alfa-værdi fremkommer. For at beregne PV indsættes den totale alfa-værdi blot i den korrekte formel.

Oftest bruges den totale afla-værdi dog i den sammenhæng, at man skal finde PMT og ikke når PV skal findes. Dette gælder fx når der i opgaver spørges til ”samme beløb over en årrække”. Her vil der i årrækken typisk være to forskellige kalkulationsrenter, og det er derfor nødvendigt med en ”total” alfa. Her skal man bruge $\alpha^{-1}_{n\neg R}$. Med udgangspunkt i ovenstående kan den findes således:

$$\alpha^{-1}_{n\neg R}(\text{total}) = \left[\alpha_{3\neg R1} + \alpha_{4\neg R2} \cdot (1+R_1)^{-3} + \alpha_{3\neg R3} \cdot (1+R_2)^{-4} \cdot (1+R_1)^{-3}\right]^{-1}$$
$$= \frac{1}{\alpha_{3\neg R1} + \alpha_{4\neg R2} \cdot (1+R_1)^{-3} + \alpha_{3\neg R3} \cdot (1+R_2)^{-4} \cdot (1+R_1)^{-3}}$$

Begge formler kan udvides til at gælde for flere/færre perioder.

For to perioder ser formlerne derfor således ud:

$$\alpha_{n\neg R}(\text{total}) = \alpha_{3\neg R1} + \alpha_{4\neg R2} \cdot (1+R_1)^{-3} \quad \text{og}$$
$$\alpha^{-1}_{n\neg R}(\text{total}) = \left[\alpha_{3\neg R1} + \alpha_{4\neg R2} \cdot (1+R_1)^{-3}\right]^{-1} = \frac{1}{\alpha_{3\neg R1} + \alpha_{4\neg R2} \cdot (1+R_1)^{-3}}$$

16. Opgave – Investering

Det er i dag den 1. januar 2002. Henrik ved, at han på sin 60 års fødselsdag. Modtager 1 mio. kr. i fødselsdagsgave af venner og familie. Folketinget har netop vedtaget en ”gave-afgift”, som Henriks gave bliver underlagt. ”Gave-afgiften” er angivet i bilag 1.

Antagelser:

- Henrik fylder i dag 30 år.
- Henrik ved med sikkerhed, at han ikke skal bruge flere penge, når han er 90 år.
- Henrik finansierer sig med lån til sin 50 års fødselsdag. Herefter er han gældfri og har stor overskydende likviditet.
- Beskatning af renteudbetalinger er 40%. Beskatning af renteindtægter er 30%
- Inflationen er 5% årligt
- Skat betales ultimo året.
- Lån forrentes med 10% årligt.
- Obligationer forrentes (effektivt) med 8% årligt.
- Bankbog forrentes (effektivt) med 2% årligt.

Spørgsmål A.

Hvad er værdien i dag af den gave, som Henrik modtager på sin 60 års fødselsdag?

Spørgsmål B.

Henrik ønsker at fordele gaven i lige store årlige forbrug alle år fra i dag til han bliver 90 år. Beregn dette årlige forbrug (tip: regn i forbrug korrigeret for inflation).

Oppositionen har dog foreslået, at al gave blot skal beskattes med 10% uanset gavens størrelse. Forslaget ser ud til at vinde en del opbakning i folketinget.

Spørgsmål C.

Beregn nutidsværdien af den ekstra ”gevinst”, som Henrik opnår, såfremt oppositionen får sin vilje.

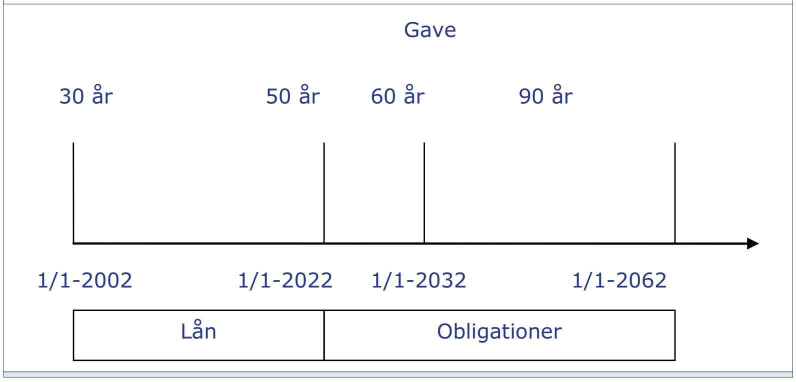
Bilag 1

Gavens størrelse:	Afgift i kr.:
1. Højst 40.000 kr.	0 kr.
2. Over 40.000 dog mindre eller lig 300.000 kr.	0 kr. af 40.000 og 10% af resten
3. Over 300.000 kr. dog mindre eller lig 600.000 kr.	30.000 kr. af 300.000 kr. og 12% af resten.
4. Over 600.000 kr. dog mindre eller lig 1.000.000 kr.	72.000 kr. af 600.000 kr. og 14% af resten.
5. Over 1.000.000 dog mindre end 2.000.000 kr.	140.000 kr. af 1.000.000 kr. og 16% af resten.
6. Over 2.000.000	320.000 kr. af 2.000.000 kr. og 18% af resten.

Spørgsmål A.

Følgende tidsforløb kan konstrueres:

Figur 1:



Øverst i figur 1 fremgår Henriks alder og de tilhørende datoer. Desuden fremgår tidspunktet for gaven. Yderligere fremgår i bunden, hvornår Henrik har lån og hvornår han investerer i obligationer.

Følgende skal findes:

- Beløb han modtager minus afgifter.
- Kalkulationsrenter.
- Nutidsværdi.

Beløb han modtager minus afgifter: $600.000 - 72.000 + 400.000 \cdot (1 - 14\%) = 872.000$ kr.

Kalkulationsrente: Det fremgår direkte af opgaveteksten, at Henrik finansierer sig med lån til han er 50 år, hvorfor lånet i disse år danner udgangspunkt for kalkulationsrenten. Desuden fremgår det af opgaveteksten, at Henrik har overskydende likviditet efter han er blevet 50 år. Den kan han sætte i banken (bankbog, 2%) eller investere i obligationer (8%). Da obligationer giver en højere rente end bankbog er det obligationer, der danner grundlag for Henriks kalkulationsrente (jf. ovenstående figur 1).

- Kalkulationsrente 1/1-2002 til primo 31/12-2021 (dvs. primo 1/1-2022):
  $R_{efterskat} = R \cdot (1-T) = 10\% \cdot (1-40\%) = 6\%$.

- Kalkulationsrente for 1/1-2022 til 31/12-2061 (dvs. primo1/1-2062):
  $R_{efterskat} = R \cdot (1-T) = 8\% \cdot (1-30\%) = 5,6\%$.

Renten er begge steder den højeste alternative forrentning han kan få af sine penge. Når han er finansieret vha. lån kan han spare renteudgifterne på 6% ved at indfri lånet. Når han har betydelige likvide midler kan han få renteudbytte ved at investere sine penge i obligationer. I begge tilfælde skal hans kalkulationsrente korrigeres for skat. Mht. lånet skyldes det, at han får et skattefradrag for de renteudbetalinger han har til lånet – derfor betaler han netto kun 6% i rente på sit lån. Det samme gælder mht. obligationer. Her skal han betale skat af sine renteindtægter, så han får kun netto et udbytte på 5,6%. Bemærk at skatten er forskellig for renteindtægter og renteudgifter.

Nutidsværdi: Da Henrik modtager gaven d. 1/1-2032 skal den først diskonteres med kalkulationsrenten baseret på obligationer (10 år/terminer) og derefter med kalkulationsrenten baseret på lån (20 år/terminer).

- $PV_{1/1-2022} = 872.000 \cdot (1+5,6\%)^{-10} = 505.682$ kr.
- $Nutidsværdi = PV_{1/1-2002} = 505.682 \text{ kr.} \cdot (1+6\%)^{-20} = 157.674 \text{ kr.}$

Nutidsværdien er derfor 157.674 kr.

Spørgsmål B.

Hvis forbruger skal være lige stort i alle år, skal han have 5% flere penge hvert år, hvis der er tale om løbende priser. I faste priser skal han derimod have det samme beløb hvert år. Det er derfor nemmest at regne i faste priser.

Følgende skal bestemmes:

- Antallet af år som forbruget skal fordeles over.
- Relevante kalkulationsrenter.
- Et antal α -værdier svarende til antallet af kalkulationsrenter.
- Forbruget fordelt over årene.

Antallet af år, som forbruget skal fordeles over: 60 år.

Relevante kalkulationsrenter: Forbruget skal fordeles over to perioder med forskellige kalkulations-renter. Begge disse skal korrigeres for inflation, da forbruget er i faste priser (2002-priser).

- Kalkulationsrente efter skat korrigeret for inflation 1/1-2002 til 31/12-2021 (dvs. primo 1/1-2022): $R^{real}_{efterskat} = \frac{1+R\cdot(1-T)}{1+Q} - 1 = \frac{1+10\%\cdot(1-40\%)}{1+5\%} - 1 = 0,95\%$.
- Kalkulationsrente efter skat korrigeret for inflation 1/1-2022 til 31/12-2061 (dvs. primo1/1-2062): $R^{real}_{efterskat} = \frac{1+R\cdot(1-T)}{1+Q} - 1 = \frac{1+8\%\cdot(1-30\%)}{1+5\%} - 1 = 0,57\%$.

α *-værdier*: Der skal findes to α -værdier, en til hver kalkulationsrente.

- Perioden 1/1-2002 til 31/12-2021 (dvs. primo 1/1-2022): $\alpha_{20\neg 0,95\%} = 18,1324$
  - Denne α -værdi lægger en nutidsværdi ud over den følgende 20 år (n=20).
- Perioden 1/1-2022 til 31/12-2061 (dvs. primo1/1-2062): $\alpha_{40\neg 0,95\%} = 35,6672$
  - Bemærk: Denne sidste α -værdi har effekt fra 2022. Da vi skal bruge nutidsværdien skal den derfor tilbagediskonteres over 20 år (2002-2022) med den relevante kalkulationsrente (0,95%, da vi tilbagediskonterer den hen over den periode, hvor dette er Henriks kalkulationsrente):
    $\alpha_{40\neg 0,95\%} \cdot (1+0,95\%)^{20} = 35,6672 \cdot (1+0,95\%)^{-20} = 29,5218$.
    Denne korrektion sørger for, at vi kan benytte os af nutidsværdier.

Forbruget fordelt over årene: Forbruget i faste priser kan nu findes vha. Følgende formel: $PMT = PV \cdot \alpha_{n\neg R}^{-1}$. Formlen behandler kun PMT for en værdi af alfa. Har man med flere α -værdier at gøre, skal de alle lægges sammen, før der multipliceres med PV. I dette tilfælde får vi: $PMT = PV \cdot \left(\sum \alpha_{n\neg R}\right)^{-1} = 157.674 \cdot (18,1324 + 29,5218)^{-1} = 3.309$ kr.

Henrik kan derfor hvert år have et forbruge på 3.309 kr. målt i faste (2002) priser.

Spørgsmål C.

Gave med ny afgift: $1.000.000 \cdot (1-10\%) = 900.000$ kr.

Nutidsværdien heraf: $PV = 900.000 \cdot (1+5,6\%)^{-10} \cdot (1+6\%)^{-20} = 162.737$ kr.

"Ekstra gevinst:" 162.737 kr. - 157.674 kr. = 5.063 kr.

17. Opgave – Afskrivninger

Selskabet Henrik A/S er en dansk virksomhed, som overvejer, at forfølge et investeringsprojekt. Projektet har en vis risiko, så kalkulationsrenten er fastlagt til 15%. Der skal investeres 20 mio. kr. i projektet. Selskabsskattesatsen er 30%.

Spørgsmål A.

Helt exceptionelt har regeringen netop vedtaget, at sådanne investeringsprojekter kan afskrives lineært over 5 år (hvorefter det skrottes) eller vha. saldoafskrivningsmetoden (hvor det forudsættes, at anlægget afskrives fuldt ud). Det står virksomhederne frit for selv at vælge metode! Hvilken metode bør Henrik A/S benytte?

Spørgsmål B.

Projektet reducerer hvert år produktionsomkostningerne med 4 mio. kr. de næste 5 år. Forudsat, at Henrik A/S benytter den mest fordelagtige afskrivningsmetode, bør projektet da gennemføres?

Spørgsmål C.

Vil svaret i spørgsmål B ændre sig, hvis kalkulationsrenten er 0%?

Spørgsmål A.

Kalkulationsrenten efter skat fastlægges til $R_{\text{efter skat}} = 15\% \cdot (1 - T) = 10{,}5\%$

Lineær afskrivning over 5 år:

$$A_{\text{efter skat}} = A - A \cdot T \cdot p \cdot \alpha_{n \neg R_{\text{efter skat}}} = 20 - 20 \cdot 30\% \cdot \frac{1}{5} \cdot \alpha_{5 \neg 10{,}5\%} = 20 - 1{,}2 \cdot 3{,}743 = 15{,}51$$

Hvis projektet afskrives lineært bliver anskaffelsessummen efter skat 15,51 mio. kr.

Saldoafskrivning:

$$A_{\text{efter skat}} = A \cdot \left(1 - T \cdot \frac{25\%}{(25\% + R_{\text{efter skat}})}\right) = 20 \cdot \left(1 - 30\% \cdot \frac{25\%}{(25\% + 10{,}5\%)}\right) = 15{,}77 \text{ mio. kr.}$$

Hvis projektet afskrives vha. saldometoden bliver anskaffelsessummen efter skat 15,77 mio. kr.

Henrik A/S bør derfor afskrive projektet lineært.

Spørgsmål B.

Det forudsættes, at Henrik benytter den lineære afskrivningsmetode, da den giver den laveste anskaffelsessum efter skat.

Nutidsværdien af besparelserne, som projektet medfører, kan nu bestemmes.

$$PV_{\text{Besparelser}} = 4 \cdot (1 - T) \cdot \alpha_{5 \neg 10{,}5\%} = 4 \cdot (1 - 30\%) \cdot 3{,}7429 = 10{,}48 \text{ mio. kr.}$$

Bemærk: Henrik A/S sparer ikke 4 mio. kr. fuldt ud. Husk på, at virksomheder er berettiget til et skattefradrag på deres udgifter. Dvs., hvis Henrik A/S skulle betale $4 \cdot (1 - 30\%) = 2,8$ de 4 mio. kr. selv, ville Henrik A/S kun betale mio. kr. da virksomheden får 30% i skattefradrag. Når Henrik A/S nu sparer 4 mio. kr. i produktionsomkostninger, så er der godt nok 4 mio. kr. mindre af udgifterne, men han mister desuden de 1,2 mio. kr., som han fik i fradrag før. Han sparer derfor netto kun 2,8 mio. kr.

Nutidsværdien af projektet kan nu bestemmes:

$NPV_{Projekt} = A_{efter\ skat} + PV_{Besparelser}$ = -15,51 + 10,48 = - 5,03 mio. kr.

Da projektet har negativ NPV bør det ikke gennemføres.

Spørgsmål C.

Kalkulationsrenten efter skat bliver nu ligeledes $0\% \cdot (1 - 30\%) = 0\%$.

PV af besparelserne kan igen findes:

PV = $4 \cdot (1 - T) \cdot \alpha_{5 \neg 0\%} = 4 \cdot (1 - 30\%) \cdot 5 = 14$ mio. kr.

Nutidsværdien af projektet kan nu bestemmes:

$NPV_{Projekt} = A_{efter\ skat} + PV_{Besparelser}$ = -15,51 + 14 = -1,51 mio. kr.

Projektet har stadig negativ NPV, hvorfor det ikke bør gennemføres.